2012 年　名古屋大学 $\boxed{1}$

解法：ラクな形のエネルギーの式を使う

単振動の問題では、次の形のエネルギーの式を使うと計算がラクになる。

単振動する物体の位置エネルギー ＝ $\boldsymbol{\frac{1}{2}KX^2}$

(Kは復元力 F ＝ $(-)KX$の K　　Xは振動の中心からのずれ)

「位置エネルギー」とは、「重力とばねの位置エネルギーを合わせたもの」。

※　$\boldsymbol{X}$は振動の中心からのずれであり、ばねの自然長からのずれではない

(1)　力のつりあい：$kd = mg$ より　　$k = \frac{mg}{d}$

(2)　まず、衝突直前の粘土の速さを求める。力学的エネルギー保存則を使って

$$\frac{m}{2}\cdot g(h+d) = \frac{1}{2}\cdot\frac{m}{2}\cdot v^2 \quad \text{より} \qquad v = \sqrt{2g\left(h+d\right)}$$

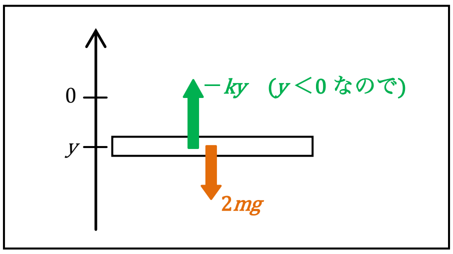
次に、「衝突」なので運動量保存則を使って

$$\left(\frac{m}{2}+\frac{m}{2}\right)\cdot\sqrt{2g\left(h+d\right)} = \left(\frac{m}{2}+\frac{m}{2}+m\right)\cdot V_1$$

よって

$$V_1 = \sqrt{\frac{g\left(h+d\right)}{2}}$$

(3)　運動方程式は　$\underline{2m \cdot a = -ky - 2mg}$



単振動の中心 ＝ 力がつりあう位置　なので、　$-ky = 2mg$　となる位置。

よって、中心を示す座標$y_a = -\dfrac{2mg}{k} = \underline{-2d}$

(4)　ラクな形のエネルギー保存則を使うと

$$\underbrace{\frac{1}{2}kd^2 + \frac{1}{2}\cdot 2m\,V_1{}^2}_{y=-d\text{ のとき}(y_a\text{から }d\text{だけ離れている})} = \underbrace{\frac{1}{2}k(2d)^2 + \frac{1}{2}\cdot 2m\,V_2{}^2}_{y=0\text{ のとき}(y_a\text{から }2d\text{だけ離れている})}$$

よって　$V_2 = \underline{\sqrt{\dfrac{g(h-2d)}{2}}}$

(5)　周期 $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{M}{K}}$

ここで Kは復元力の比例定数。今回はばねの力での単振動なので $K = k$。

また Mは単振動する物体の質量。おもりが離れたあとは粘土だけなので $M = m$。

よって　$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{M}{K}} = \underline{2\pi\sqrt{\dfrac{d}{g}}}$

また、単振動の中心 ＝ 力がつりあう位置　なので、　$-ky = mg$　となる位置。

よって、中心を示す座標$y_b = -\dfrac{mg}{k} = \underline{-d}$

最後に、おもりが離れる前と後での振幅を比較するため、それぞれの場合について
エネルギー保存則を書く。ラクな形を利用すると

$$\text{おもりが離れる前：}\quad \overset{y=0\text{ のとき}(y_a\text{ から }2d\text{ だけ離れている})}{\frac{1}{2}k(2d)^2 + \frac{1}{2}\cdot 2m\,{V_2}^2} \quad = \quad \overset{\text{折り返し点}}{\frac{1}{2}kA^2} \qquad (A\text{：振幅})$$

$$\text{おもりが離れた後：}\quad \overset{y=0\text{ のとき}(y_b\text{ から }d\text{ だけ離れている})}{\frac{1}{2}kd^2 + \frac{1}{2}\cdot m\,{V_2}^2} \quad = \quad \overset{\text{折り返し点}}{\frac{1}{2}kA'^2} \qquad (A'\text{：振幅})$$

2 式を比較すると、(左辺から明らかなように)おもりが離れる前の方がエネルギーが
大きい。
よって、$A > A'$。つまり、おもりが離れると振幅は <u>小さく</u> なる。