2012 年　東京工業大学 $\boxed{1}$

解法：規則性を発見する

衝突を何度も繰り返す問題で、1 回衝突するたびに

$\begin{bmatrix}\text{運動量保存の式}\\ \text{反発係数の式}\end{bmatrix}$ を書いて計算するのはとても大変である。

そこで、入試本番の限られた時間内に解答までたどり着くためには

“規則性の発見”

が重要である。

難関大の問題には、この考え方を使わなければならないものが多い。

解法：できない問題があっても、次へ進む

今回は(d)が難問であり、実際の合格者でも解けなかった人が多いはずである。
しかし、(d)が解けないからといってそれに続く(e)、(f)もあきらめてしまうのは
勿体ない。実際(e)はそれほど難しくなく、合格のためには落とせない問題である。

今回の(e)、(f)は(d)を飛ばしても解ける問題である。
入試問題では、必ずしも前問が解けなければ次も解けない、ということはない。
1 つ解けなくてもそこでやめず、次に進むべきである。

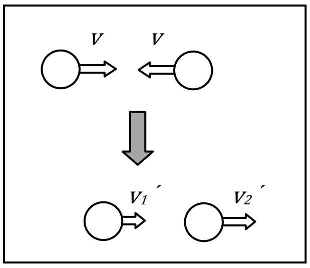
(a)　周期の $\dfrac{1}{4}$ なので

$$t_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \times \frac{1}{4} = \underline{\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{L}{g}}}$$

(b)　力学的エネルギー保存則を使って

$$m_1 gh = \frac{1}{2} m_1 v^2 \qquad \text{よって} \quad v = \underline{\sqrt{2gh}}$$

(c)　衝突の問題なので、次の 2 つの式を書く



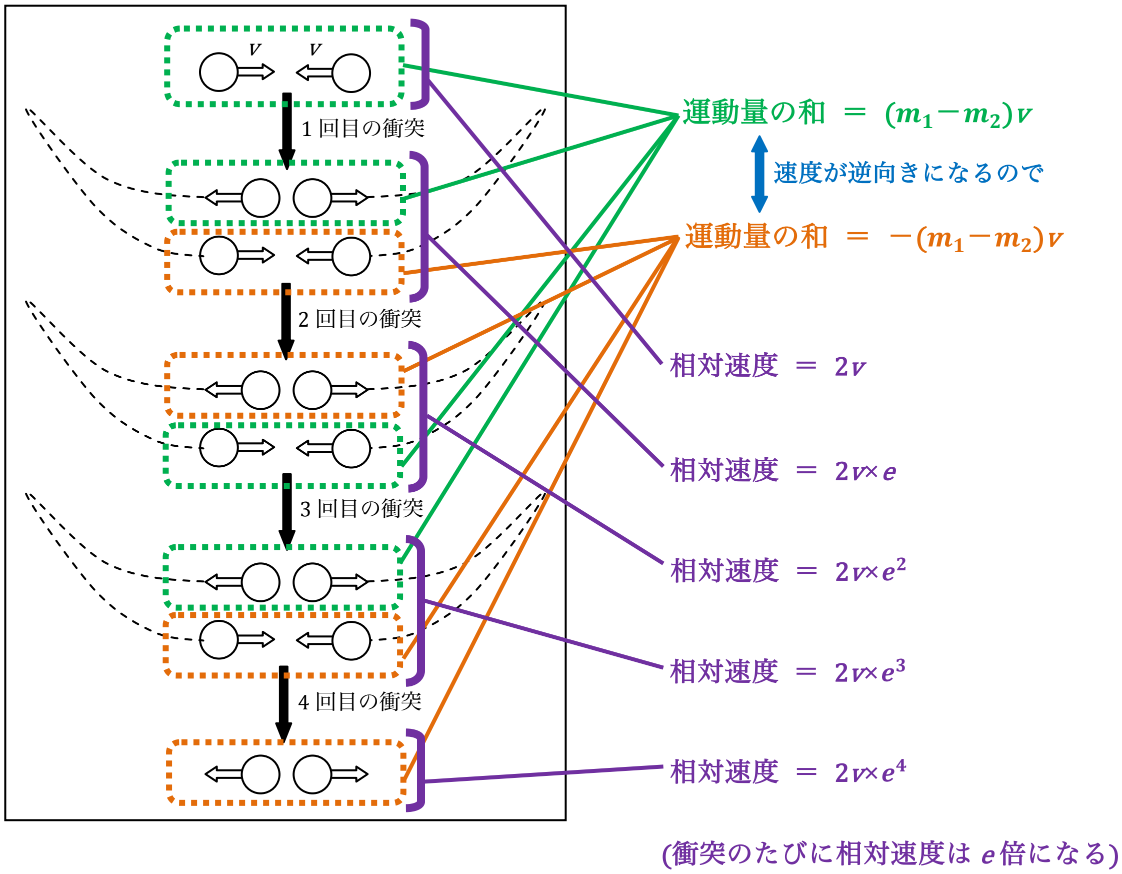
$$\begin{cases} \text{運動量保存}\quad ：m_1 v + (-m_2 v) = m_1 v_1{}' + m_2 v_2{}' \\ \text{反発係数の式}：e = \dfrac{v_2{}' - v_1{}'}{v + v} \end{cases}$$

これを解いて

$$v_1{}' = \underline{\frac{m_1 - (1+2e)m_2}{m_1 + m_2}\, v} \qquad v_2{}' = \underline{\frac{-m_2 + (1+2e)m_1}{m_1 + m_2}\, v}$$

(d)　振り子の周期は $2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$ なので、速さ v が変化してもずっと一定である。

よっておもりは最下点で衝突を繰り返す。



上のような規則性を発見できるかがポイント。これが分かれば、

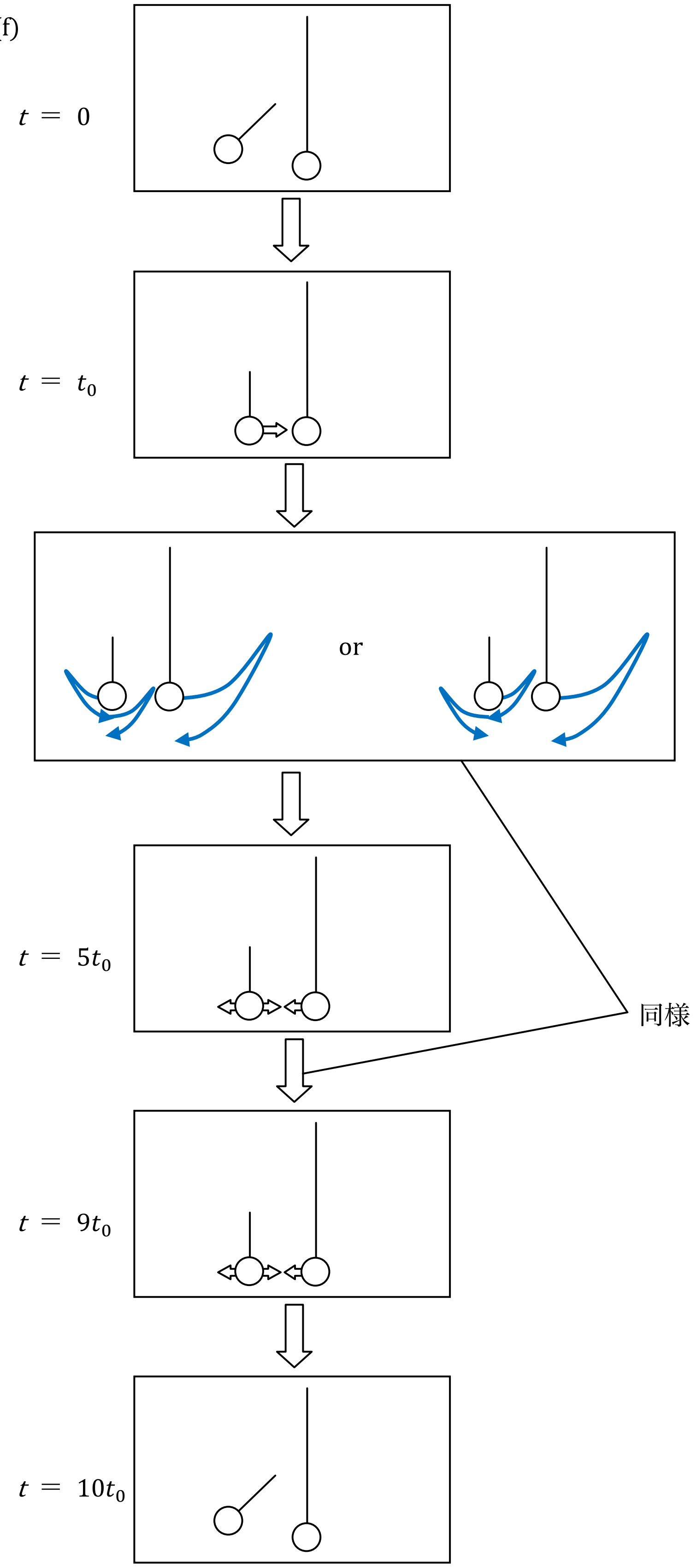
4 回目の衝突直後の

$$\begin{cases} \cdot\ \text{運動量の和} = m_1 v_1" + m_2 v_2" = -(m_1 - m_2)v \\ \cdot\ \text{相対速度} = v_2" - v_1" = 2v \times e^4 \end{cases}$$

これを解いて

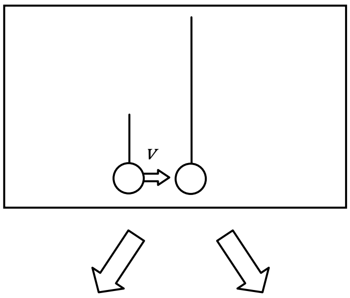
$$v_1" = \frac{-m_1 + (1-2e^4)m_2}{m_1 + m_2} v \qquad v_2" = \frac{m_2 - (1-2e^4)m_1}{m_1 + m_2} v$$

(e),(f)

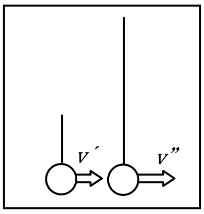


(衝突するのは t ＝ t_0、$5t_0$、$9t_0$)

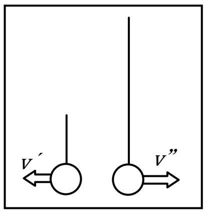
t ＝ t_0の衝突の直後の状態は、次の 2 パターンが考えられる。



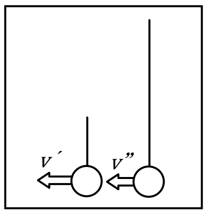
①



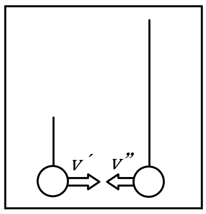
②



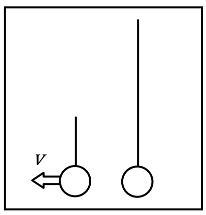
①の場合、t ＝ $9t_0$の衝突の直前の状態は



②の場合、t ＝ $9t_0$の衝突の直前の状態は



t ＝ $9t_0$の衝突の直後は



となっているはず。

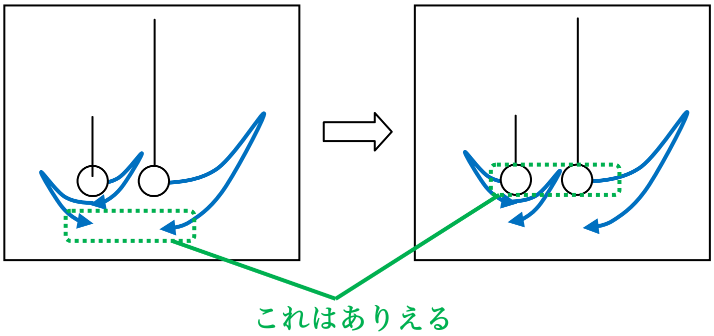
これは t ＝ t_0の**衝突の直前を巻き戻ししている状態**。

それを実現するためには、**衝突直後を巻き戻ししている状態が必要**である。

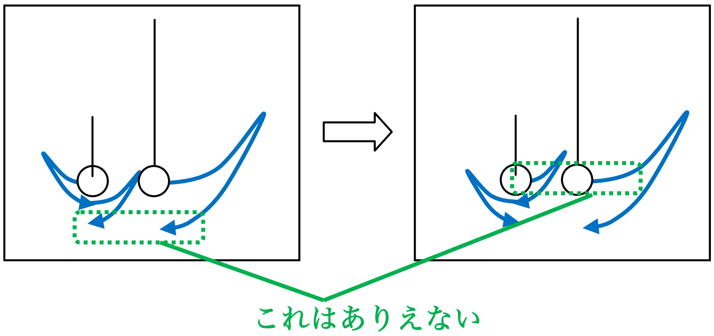
これは、弾性衝突の場合に成り立つ関係である。

整理すると、

①の場合　$t = t_0 \sim 5t_0$　　　$t = 5t_0 \sim 9t_0$



②の場合　$t = t_0 \sim 5t_0$　　　$t = 5t_0 \sim 9t_0$



よって、①が起こるのでこれで計算すればよい。

$t = t_0$の衝突を式にすると

・運動量保存の式：$v = M_1 v' + M_2 v''$

・反発係数の式　：$1 = \dfrac{v'' - v'}{v}$

$t = 5t_0$の衝突を式にすると

・運動量保存：$M_1 v' - M_2 v'' = -M_1 v' + M_2 v''$

これらを整理して、　$\dfrac{M_1}{M_2} = \underline{3}$