2012 年　東京大学 $\boxed{1}$ Ⅱ、Ⅲ

解法：前問の答えを利用する

解法：弾性衝突では力学的エネルギー保存則が成り立つことを使う

(解説)

Ⅱ(1)　小球 A、B は最初、同じ高さで同じ速さを持っているので、この後も高さが等しければ、速さも等しくなる。

(式で説明すると)

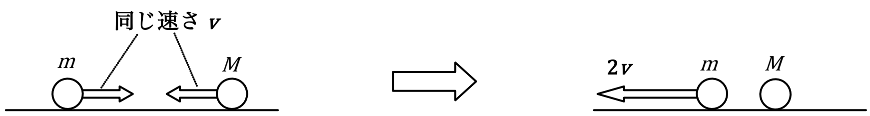
小球 A：$mgh + \frac{1}{2} m{v_0}^2 = mgx + \frac{1}{2} mv^2$

小球 B：$Mgh + \frac{1}{2} M{v_0}^2 = Mgx + \frac{1}{2} Mv'^2$

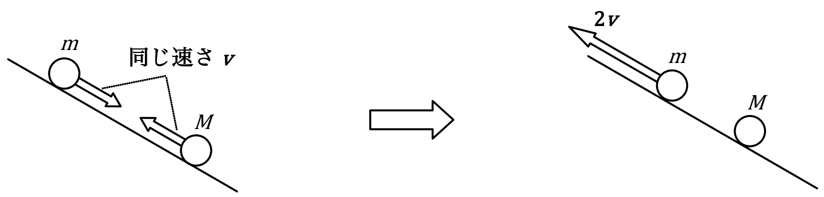
から、m、M を消去すれば $\underline{v = v'}$ となる。

(2)　斜面上での衝突は

Ⅰの衝突



と同じ状況なので、



となる。このように前問を利用することで、計算の手間を省くことができる。

小球 A、B の力学的エネルギーの和は保存されるので(弾性衝突なので)

$$(m+M)gh + \frac{1}{2}(m+M)v_0{}^2$$ ：水平面 H 上のとき

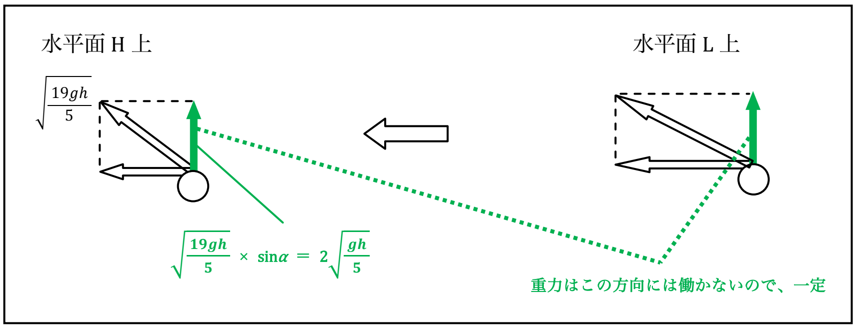
$$= (m+M)gx + \frac{1}{2}(m+M)v^2$$ ：衝突直前

$$= (m+M)gx + \frac{1}{2}m(2v)^2$$ ：衝突直後

$$= Mgx + mgh + \frac{1}{2}mv_f{}^2$$ ：A が水平面 H 上へ戻ったとき

ここへ $M = 3m$ を代入して $x = h - \dfrac{4v_0{}^2 - v_f{}^2}{6g}$

Ⅲ (1) 小球 B について

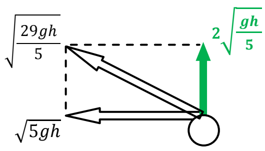


力学的エネルギー保存則を書くと

$$\frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}M\left(\sqrt{\frac{19gh}{5}}\right)^2 + Mgh$$

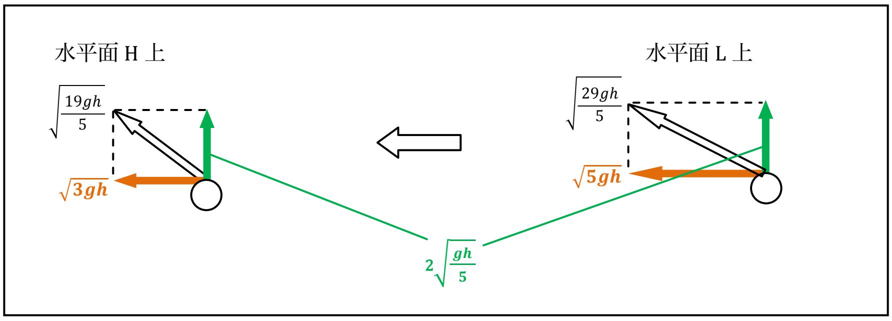
これを解いて $v = \sqrt{\dfrac{29gh}{5}}$

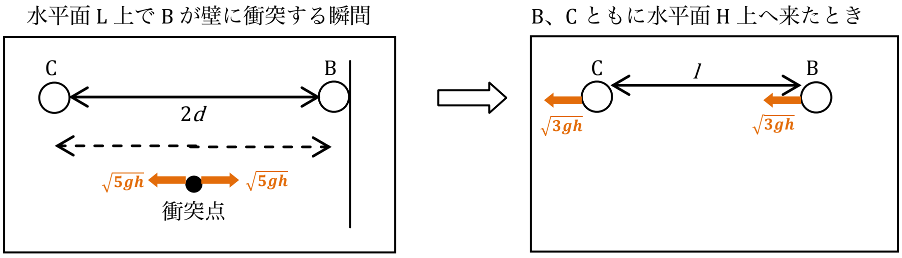
よって、水平面 L 上で



なので、$\tan\beta = \dfrac{2}{5}$

(2)　小球 B、C ともに、速度は次のように変化する。





B の方が水平面 L 上で動いている時間が $\dfrac{2d}{\sqrt{5gh}}$ だけ長く、その分

C の方が水平面 H 上で動いている時間が $\dfrac{2d}{\sqrt{5gh}}$ だけ長いことが分かる。

(斜面を上っていく運動に違いはないので)

つまり、時間 $\dfrac{2d}{\sqrt{5gh}}$ で距離が $2d-l$ だけ縮まるので、

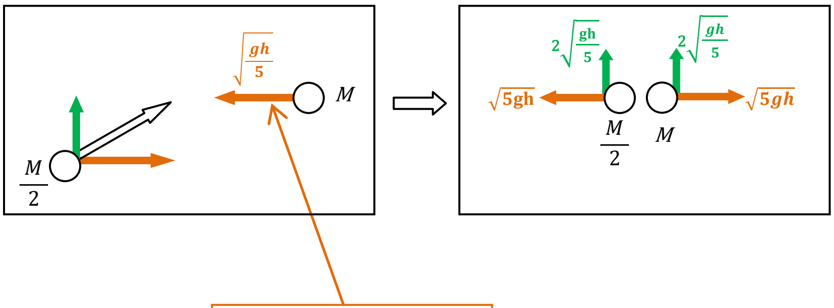
$$\sqrt{5gh}\times\frac{2d}{\sqrt{5gh}}-\sqrt{3gh}\times\frac{2d}{\sqrt{5gh}}=2d-l$$

よって　$\underline{d=\dfrac{\sqrt{15}}{6}l}$

(3)　解法①

斜めの衝突なので、速度を分解して

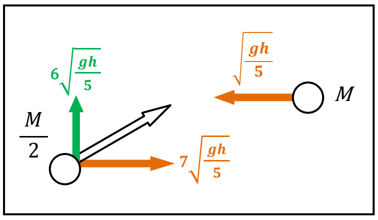
衝突前　　　　　　　　　　　　衝突後



$$\boxed{Mg\cdot\frac{h}{10}=\frac{1}{2}Mv^2}$$ より

各成分について運動量保存則を使って計算すると、

衝突前



と求められる。ここから、C の速さは $\sqrt{17gh}$ と求まり、

力学的エネルギー保存則から

$$\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{M}{2}V^2+\frac{M}{2}\cdot gh}_{\text{水平面 H 上}}=\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{M}{2}(\sqrt{17gh})^2}_{\text{水平面 L 上}}$$

よって　$V=\underline{\sqrt{15gh}}$

解法②

弾性衝突なので、力学的エネルギー保存則を使って

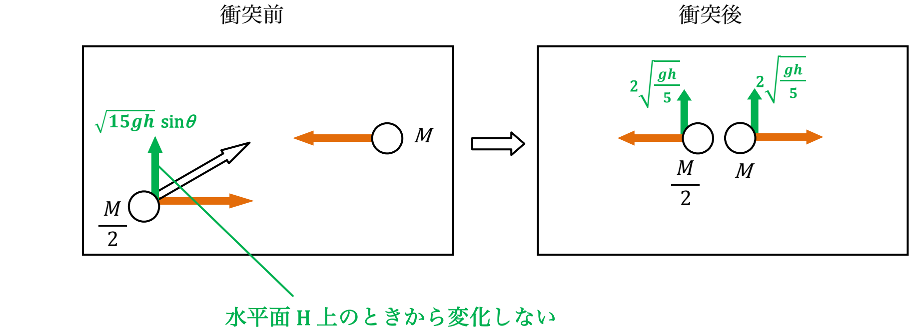
(水平面 L 上で)

$$\overset{\text{衝突前}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{M}{2}v^2 + \frac{1}{2}M\left(\sqrt{\frac{gh}{5}}\right)^2} = \overset{\text{衝突後}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{M}{2}\left(\sqrt{\frac{29gh}{5}}\right)^2 + \frac{1}{2}M\left(\sqrt{\frac{29gh}{5}}\right)^2}$$

よって　$v = \sqrt{17gh}$

以下同様。

(4)



南北方向の運動量保存則を書くと

$$\overset{\text{衝突前}}{\frac{M}{2}\cdot\sqrt{15gh}\sin\theta} = \overset{\text{衝突後}}{\left(\frac{M}{2} + M\right)\cdot 2\sqrt{\frac{gh}{5}}}$$

よって　$\sin\theta = \dfrac{2\sqrt{3}}{5}$