2012 年　東京工業大学 $\boxed{1}$

解法：観測者の視点をハッキリさせる(この問題は円運動する視点から単振動を見ると考えやすい)

解法：物体に働く力が｢復元力｣であることを見抜く

解法：複雑な単振動でも　$\frac{1}{2}KA^2 = \frac{1}{2}mV_{max}{}^2$　を使える

(K：復元力 $F = Kx$ の K　　A：振幅

V_{max}：最大速度(振動中心での速度)　　　)

(解説)

［A］(a)　問題文より、点 A、C では $\theta = \frac{\pi}{3}$ であると分かる。

求める速さを Vとして、力学的エネルギー保存則の式を書くと

$$Mg\cdot R(\cos\theta - \cos\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}MV^2$$

よって

$$\underline{V = \sqrt{gR(2\cos\theta - 1)}}$$

また、物体は非等速円運動をするので、円の中心方向への運動方程式だけを書いて

$$M\frac{V^2}{R} = N - Mg\cos\theta$$

から

$$N = \underline{Mg(3\cos\theta - 1)}$$

(b)　衝突直前の質量 M の物体の速度は、(a)の答えで $\theta = 0$ として

$$V = \sqrt{gR}$$

と求まる。

その後衝突するので、次の 2 式を書く。

運動量保存の式：$M\sqrt{gR} = MV' + mv$

反発係数の式　：$e = \dfrac{v - V'}{\sqrt{gR}}$

2 式から

$$v = \frac{(1+e)M\sqrt{gR}}{M+m}$$

と求まる。

その後、質量 m の物体が摩擦なく点 C まで上昇するので、力学的エネルギーが保存される。点 C での速度を v' とすると

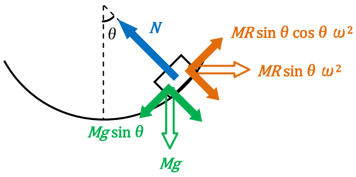
$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}mgR$$

ここで、点 C でレールから離れるためには $v' > 0$ ならよいので

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mgR > 0$$

よって　<u>$eM > m$</u>　が求める条件となる。

［B］(c)　ア．<u>垂直抗力</u>　　イ．<u>遠心力</u>　　ウ．<u>重力</u>



レールに沿った方向の力のつりあいを書くと

$$MR\sin\theta\cos\theta\,\omega^2 = Mg\sin\theta$$

よって　$\cos\theta = \dfrac{g}{R\omega^2}$

$\dfrac{1}{2} < \cos\theta < 1$　なので　$\dfrac{1}{2} < \dfrac{g}{R\omega^2} < 1$　であり、

$$\underline{\sqrt{\frac{g}{R}} < \omega < \sqrt{\frac{2g}{R}}}$$

(d)　レールに沿った方向の力の大きさ ＝ $|MR\sin\theta\cos\theta\omega_0{}^2 - Mg\sin\theta|$

ここで、角θ_0のときに物体に働く力はつりあったので、(c)より

$$\cos\theta_0 = \frac{g}{R\omega_0{}^2}$$

問題文に「gを使わずに」とあるので、これを　$g = R\cos\theta_0\omega_0{}^2$　と変形して代入し、

レールに沿った方向の力の大きさ ＝ $\left|MR\sin\theta\cos\theta\omega_0{}^2 - M\cdot R\cos\theta_0\omega_0{}^2\cdot\sin\theta\right|$

$$= \underline{MR\omega_0{}^2\sin\theta\ |\cos\theta - \cos\theta_0|}$$

(e)　$\varDelta\theta > 0$ のとき

レールに沿った方向の力の大きさ

$= MR\omega_0{}^2\sin\theta(\cos\theta - \cos\theta_0)$

$= MR\omega_0{}^2\sin(\theta_0 + \varDelta\theta)\{\cos(\theta_0 + \varDelta\theta) - \cos\theta_0\}$

$\fallingdotseq MR\omega_0{}^2(\sin\theta_0 + \varDelta\theta\cos\theta_0)\{\cos\theta_0 - \varDelta\theta\sin\theta_0 - \cos\theta_0\}$

$= -MR\omega_0{}^2\varDelta\theta\sin\theta_0(\sin\theta_0 + \varDelta\theta\cos\theta_0)$

$\fallingdotseq -MR\omega_0{}^2\varDelta\theta\sin^2\theta_0$　　($(\varDelta\theta)^2$の項は無視できるので)

ここで、「つりあいの位置からの距離」＝$R\varDelta\theta$　であることを見抜くことがポイント！

これに気づけば、

物体に働く力 ＝ $-K\cdot X = -M\omega_0{}^2\sin^2\theta_0\cdot R\Delta\theta$

つまり　$K = M\omega_0{}^2\sin^2\theta_0$　なので

周期 ＝ $2\pi\sqrt{\dfrac{M}{K}} = \underline{\dfrac{2\pi}{\omega_0\sin\theta_0}}$

(f)　① $\underline{0}$　　② $\underline{Mg}$

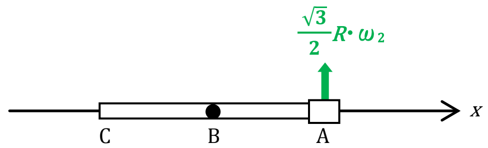
③　等加速度直線運動の公式　$y = v_0 t + \dfrac{1}{2}gt^2$　を使って

$$\frac{1}{2}R = \frac{1}{2}gt^2$$

(瞬間ごとに物体の運動は等速円運動をみなせるということは、瞬間ごとには物体の鉛直方向の速度は 0 と考えてよいということなので、鉛直方向の初速度$v_0 = 0$)

よって　$t = \underline{\sqrt{\dfrac{R}{g}}}$

④　点 A から離れる直前を真上から見ると



この後物体は、x軸方向へは移動せず、x軸に直交する方向に

$$\frac{\sqrt{3}}{2}R\omega_2 \times \sqrt{\frac{R}{g}} = \frac{\sqrt{3}}{2}R\sqrt{\frac{2g}{R}} \times \sqrt{\frac{R}{g}} = \sqrt{\frac{3}{2}}R$$

だけ移動するので

距離④ ＝ $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}R\right)^2+\left(\sqrt{\frac{3}{2}}R\right)^2} = \underline{\dfrac{3}{2}R}$

⑤　また　$\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{\frac{3}{2}}R}{\frac{\sqrt{3}}{2}R} = \underline{\sqrt{2}}$

⑥　$\varphi' = \omega_2 \times \sqrt{\dfrac{R}{g}} - \varphi = \sqrt{\dfrac{2g}{R}} \times \sqrt{\dfrac{R}{g}} - \varphi = \underline{\sqrt{2}} - \varphi$