2012年　筑波大学 $\boxed{\mathrm{I}}$

解法：非等速円運動では「円の中心方向の運動方程式」のみを書く

解法：衝突の問題では運動量保存の式と反発係数の式の 2 つを書く

解法：物体が面から受ける垂直抗力 $N \geqq 0$ であれば、物体は面から離れない

解法：質量が等しい 2 つの物体が弾性衝突するとき、速度が入れ替わる

(解説)

問 1　力学的エネルギー保存則を使って

$$\frac{1}{2}mv_0{}^2 + mga = \frac{1}{2}mv_1{}^2$$

よって

$$v_1 = \underline{\sqrt{v_0{}^2 + 2ga}}$$

問 2　衝突直前の小球 1 は非等速円運動をしているので、円の中心方向の運動方程式のみを書く

$$m\frac{v_1{}^2}{a} = N - mg$$

ここに問 1 の値を代入して解くと

$$N = \underline{m(3g + \frac{v_0{}^2}{a})}$$

問 3　衝突の問題なので、「運動量保存の式」と「反発係数の式」を書く。

衝突直後の小球 1 の速度をV_1とすると

運動量保存：$mv_1 = mV_1 + \frac{1}{2} m \cdot V_2$

反発係数　：$1 = \frac{V_2 - V_1}{v_1}$

2 式から　$\underline{V_2 = \frac{4}{3}\sqrt{{v_0}^2 + 2ga}}$

問 4(a)

衝突後の小球 2 が最高点へ到達したと仮定し、そのときの垂直抗力を N´とすると、最高点での円の中心方向への運動方程式は

$\frac{1}{2}m \cdot \frac{V^2}{a} = N' + \frac{1}{2} mg$　(V：最高点での小球 2 の速さ)　･･･ ①

また、力学的エネルギー保存則より

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m \cdot {V_2}^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m \cdot V^2 + \frac{1}{2} m \cdot g \cdot 2a$　･･･②

①、②と問 3 の結果から、

$N' = \frac{8m}{9a}{v_0}^2 - \frac{13}{18}mg$

であり、最高点まで面から離れないためには

$N' = \frac{8m}{9a}{v_0}^2 - \frac{13}{18}mg \geqq 0$

であればよいので

$\underline{v_0 \geqq \frac{\sqrt{13ag}}{4}}$

(b)　$v_0 = v_A$ のとき、小球 2 の点 C での速さは①式より($v_0 = v_A$のとき $N' = 0$)

$$V = \sqrt{ag}$$

また、小球 2 が台上に落下するまでの時間を T とすると

$$\frac{1}{2}gT^2 = a$$

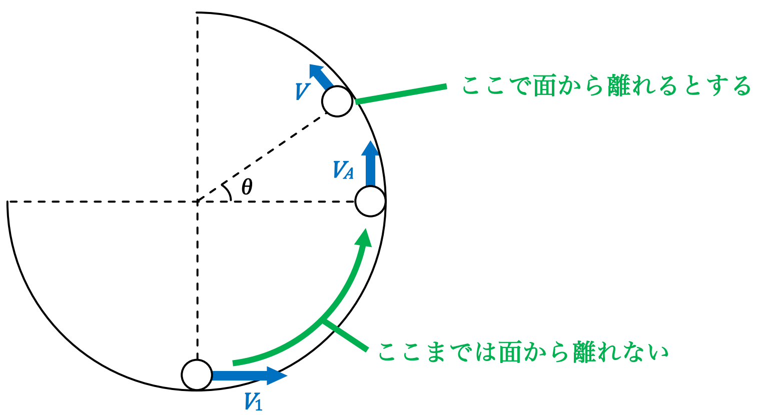
より

$$T = \sqrt{\frac{2a}{g}}$$

よって

$$d = VT - a = \underline{(\sqrt{2}-1)a}$$

問 5　小球 1 と小球 2 は質量が等しく、弾性衝突するので、速度が入れ替わる。
つまり、衝突後の小球 2 は次のような運動をすることになる。



面から離れる瞬間は、小球 2 が円筒面から受ける垂直抗力＝0 なので、
円の中心方向への運動方程式を書くと

$$m\frac{V^2}{a} = mg\sin\theta \quad \cdots ③$$

また、力学的エネルギー保存則から

$$\frac{1}{2}m{V_A}^2 = \frac{1}{2}mV^2 + mga\sin\theta \quad \cdots ④$$

③、④と問 4 の結果から

$$\sin\theta = \frac{13}{48}$$

よって　$h = a + a\sin\theta = \underline{\frac{61}{48}a}$