2013年　京都大学　Ⅰ

解法：物体に復元力が働けば単振動することを頭に置いておく

解法：復元力$F = Kx$による単振動は、ばね定数Kのばねによる水平な単振動と同様に考えればよい(周期やエネルギーの式を同様に使える)

解法：衝突問題では「運動量保存則」と「反発係数の式」を書く

解法：複雑な式は最後に代入して計算する

解法：前問の結果を利用する

解法：楕円運動する物体については「面積速度一定の式」と「力学的エネルギー保存則」の 2 つを書く

解法：質量の大小と衝突後の速度の関係を使う

(解説)

ア　半径rの球の質量は$M \times \dfrac{r^3}{R^3}$なので、

$$\text{質点に働く重力(万有引力)の大きさ} = G\,\frac{M\times\frac{r^3}{R^3}\cdot m}{r^2} = \underline{\frac{GMm}{R^3}r}$$

である。

これは、振動の中心(＝力のつりあう位置)からのずれに比例し、振動の中心向きであるので、復元力である。

イ　復元力の比例定数Kを使って、

$$\text{単振動の周期}T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

と求められる。ここへ$K = \dfrac{GMm}{R^3}$を代入して

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\mathrm{m}}{\frac{GMm}{R^3}}} = \underline{2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}}$$

ウ　力学的エネルギー保存則を使って

$$\underbrace{-G\frac{M\mu}{R+h}}_{\text{地表から高さ}h\text{のとき}} = \underbrace{-G\frac{M\mu}{R} + \frac{1}{2}\mu v^2}_{\text{トンネルに入る瞬間}} \quad \cdots ①$$

これを解いて

$$\text{トンネルに入る瞬間の速さ}v = \underline{\sqrt{\frac{2GMh}{R(R+h)}}}$$

エ　質点Aがトンネル内に入った後、質点Aには復元力$\dfrac{GM\mu}{R^3}r$が働くので(アで求めた値のmをμとした)、ばね定数$\dfrac{GM\mu}{R^3}$のばねによって水平に単振動する場合と同じようにエネルギー保存則を使うことができる。

よって

$$\underbrace{\frac{1}{2}\mu v^2 + \frac{1}{2}\frac{GM\mu}{R^3}\cdot R^2}_{\text{トンネルに入る瞬間(折返し点)}} = \underbrace{\frac{1}{2}\mu v'^2}_{\text{振動の中心}} \quad \cdots ②$$

ここへ、①から$\dfrac{1}{2}\mu v^2 = -G\dfrac{M\mu}{R+h} + G\dfrac{M\mu}{R}$を代入して解いて

$$\text{中心O での速さ}v' = \underline{\sqrt{\frac{GM(R+3h)}{R(R+h)}}}$$

オ　衝突問題なので「運動量保存則」と「反発係数の式」を書く

運動量保存則：$\mu v' = mv_1 + \mu v_2$

反発係数の式：$v_1 - v_2 = v'$

これを解くと

$$v_1 = \frac{2\mu}{\mu+m} v'$$

$$v_2 = \frac{\mu-m}{\mu+m} v'$$

と求まるので、ここへ $v' = \sqrt{\frac{GM(R+3h)}{R(R+h)}}$ を代入して

$$v_1 = \underline{\frac{2\mu}{\mu+m}\sqrt{\frac{GM(R+3h)}{R(R+h)}}}$$

$$v_2 = \underline{\frac{|\mu-m|}{\mu+m}\sqrt{\frac{GM(R+3h)}{R(R+h)}}}$$

と求められる(このように、複雑な式は最後に代入するほうがラクである)。

(求めるのは速さなので、絶対値をつける(μ と m の大小関係については書いてない))

問 1 質点 B も、トンネル内ではばね定数 $\frac{GMm}{R^3}$ のばねによって水平に単振動する場合と同じようにエネルギー保存則を使うことができるので、

$$\underset{\text{振動の中心}}{\frac{1}{2}mv_1{}^2} = \underset{\text{地表に達したとき}}{\frac{1}{2}mv'_1{}^2 + \frac{1}{2}\frac{GMm}{R^3}\cdot R^2} \quad \cdots ③$$

その後、無限遠に飛び去るには

$$\overset{\text{地表}}{\frac{1}{2}mv'^{\,2}_{1} - G\frac{Mm}{R}} = \overset{\text{無限遠}}{\frac{1}{2}mv''^{\,2}_{1} - G\frac{Mm}{\infty}} \geqq 0 \quad \cdots ④$$

であればよい。③を④へ代入して整理すると

$$\mu^2 - 6\mu m - 3m^2 \geqq 0$$

となり、これを

$$\left(\frac{\mu}{m}\right)^2 - 6\left(\frac{\mu}{m}\right) - 3 \geqq 0$$

と変形して解くと

$$\underline{\frac{\mu}{m} \geqq 3+2\sqrt{3}}$$

このように、単振動しているとき(③)と、万有引力を受けながら飛び去っていくとき(④)とで力学的エネルギー保存則を使い分けることがポイントである。

キ　アの結果を利用して、

$$\frac{GMm}{R^3}r \times \frac{x}{r} = \frac{GMm}{R^3}x$$

と求められる。
この力は中心からのずれ x に比例するので、やはり復元力であり、この場合も物体は単振動することが分かる。

ク　この単振動の周期 $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\mathrm{m}}{\frac{GMm}{R^3}}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{R^3}{GM}}$

であり、求める時間はその半分なので $\underline{\pi\sqrt{\dfrac{R^3}{GM}}}$

ケ　質点 A はトンネルの端点を折返し点とする単振動をするので

折返し点　　　　　　　　振動の中心

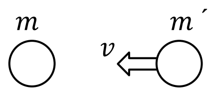
$$\frac{1}{2}\ \frac{GM\mu}{R^3}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}R\right)^2 = \frac{1}{2}\ \mu v^2 \quad \cdots ⑤$$

上の式で $\mu = m$ としても v の値は変わらない。つまり、同じ条件で質点を単振動させた場合、中心での速さは質量に無関係であることが分かる。

このことから、質点 B についても同様の振幅で単振動するためには(つまり地表に達するということ)振動の中心で同じ速さ v が必要なことが分かる。

よって、求める条件は衝突後の質点 B の速さが v 以上ということであり、そのためには $\mu \geqq \underline{m}$ であればよい。

このことは「運動量保存則」と「反発係数の式」を書いて解けば求められるが、



上のように 2 球が弾性衝突するとき

$m > m'$ なら 衝突後の m の速度 $< v$

$m = m'$ なら 衝突後の m の速度 $= v$

$m < m'$ なら 衝突後の m の速度 $> v$

であることを知っていれば、簡単に求められる。

コ　オの結果を利用することで、弾性衝突後の質点 B の速度 $v_B = \dfrac{2\mu}{\mu + m}\ v \quad \cdots ⑥$

と求められる。このように、前問の結果を利用することで時間を節約できる。

このあと、質点 B が振動の中心から地表へ到達するまでの力学的エネルギー保存則は③と同様に書けて

振動の中心　　　　　　　　地表に達したとき

$$\frac{1}{2}\ m{v_B}^2 = \frac{1}{2}\ m{v'_B}^2 + \frac{1}{2}\ \frac{GMm}{R^3}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}R\right)^2$$

その後無限遠に飛び去ったとすると④と同様の式が書ける。

$$\overset{\text{地表}}{\frac{1}{2}mv'^{2}_{B} - G\frac{Mm}{R}} = \overset{\text{無限遠}}{\frac{1}{2}mv''^{2}_{B} - G\frac{Mm}{\infty}} \geqq 0$$

2 式から

$$\overset{\text{地表}}{\frac{1}{2}mv'^{2}_{B} - G\frac{Mm}{R}} = \frac{1}{2}mv_B{}^2 - \frac{1}{2}\frac{GMm}{R^3}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}R\right)^2 - G\frac{Mm}{R} \geqq 0$$

となる。これを解いて(v_B の値を代入しなければ、計算は面倒ではない)

$$v_B \geqq \sqrt{\frac{11GM}{4R}}$$

であり、ここへ⑥を代入すると

$$\frac{2\mu}{\mu+m}v \geqq \sqrt{\frac{11GM}{4R}}$$

さらに、⑤を解いて

$$v = \sqrt{\frac{3GM}{4R}}$$

を代入して整理すると

$$\mu \geqq \underline{(2\sqrt{33} + 11)m}$$

このように、複雑な式は最後に代入するほうがラクである。

問 2 地表から飛び出す瞬間の運動エネルギー $\frac{1}{2}mv'^{2}_{B} = G\frac{Mm}{R} \times \frac{1}{2}$ より

$$v'_B = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

そして、地表から飛び出した質点 B は万有引力のもとで楕円運動するので、

面積速度一定の式：$\frac{1}{2}\ R \cdot \sqrt{\frac{GM}{R}}\ \sin 30^\circ\ =\ \frac{1}{2}\ r \cdot v$

(遠日点では $\theta =\ 90^\circ$ となる)

力学的エネルギー保存則：$G\ \frac{Mm}{R} \times \frac{1}{2} - G\ \frac{Mm}{R}\ =\ \frac{1}{2}\ mv^2 - G\ \frac{Mm}{r}$

2 式から v を消去して整理すると

$$r^2 - 2Rr + \frac{R^2}{4} = 0$$

これを解いて($r > R$ より)

$$\underline{r = \frac{2+\sqrt{3}}{2}\ R}$$