○物体を単振動させる力

運動方程式＿＿＿＿＿＿＿をもとに考えると、質量 m の物体を

角振動数 ω で単振動させるのに必要な力の

・向き　＝ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

・大きさ ＝ ＿＿＿＿＿＿＿

振動の中心からのずれ x に比例する

であることが分かる。

物体を単振動させる力は＿＿＿＿＿＿と呼ばれる。

復元力によって単振動する例

・ばね振り子

・単振り子

⇩

復元力 $F = -m\omega^2 x = -Kx$ と表すと、K を使って

・角振動数 ω ＝ ＿＿＿＿＿＿

・周期 T ＝ ＿＿＿＿＿＿

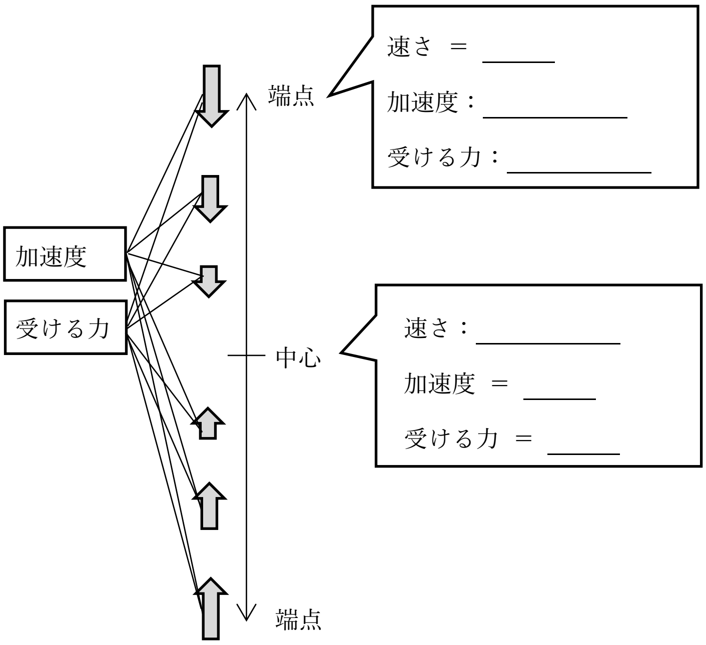
ばね振り子では、K は

＿＿＿＿＿＿＿＿＿に相当する。

と表すことができる。

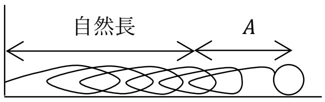
（練習）質量 0.50 kg の物体が、位置 x（m）に対して $F = -(2.0\ \mathrm{N/m}) \times x$ で表される力 F（N）を受けて単振動している。単振動の周期はいくらか。また、$x = -0.10$ m のときの加速度はいくらか。円周率を 3.14 とする。

※ 単振動についての整理



○水平ばね振り子（単振動の例）

なめらかな水平面上で、質量 m の物体をばね定数 k のばねに取りつけて
ばねの自然長から A だけ伸ばして静かにはなすと、物体は＿＿＿＿＿する。



単振動の

・端点：ばねが自然長から＿＿＿＿＿＿位置と＿＿＿＿＿＿位置

・中心：ばねが＿＿＿＿＿＿の位置

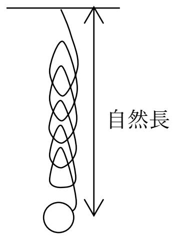
・角振動数 ω ＝ ＿＿＿＿

・周期 T ＝ ＿＿＿＿

（練習）なめらかな水平面上で、ばね定数 15 N/m の軽いばねの一端を壁に固定し、他端に質量 2.4 kg のおもりを取りつけた。このおもりを引いて、ばねが自然の長さから少し伸びたところで静かにはなした。このときに起こる振動の周期はいくらか。円周率を 3.14 とする。

○鉛直ばね振り子（単振動の例）

天井につるしたばね定数 k のばねに質量 m の物体を取りつけて、
ばねが自然長になる位置で静かにはなすと、物体は__________する。



単振動の

・端点：ばねが__________の位置と自然長から________________位置

・中心：ばねが自然長から________________位置

・角振動数 ω ＝ ________

・周期 T ＝ ________

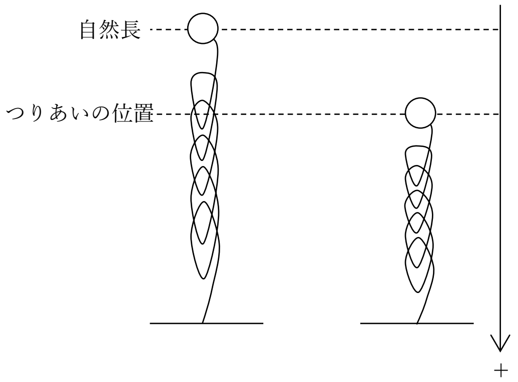
（練習）図のように、軽いばねの一端を床に固定し、他端に質量 m のおもりを取りつけると、ばねが自然の長さから d だけ縮んでつりあった。その後、ばねが自然の長さになるまでおもりを持ち上げて静かにはなすと、鉛直方向に単振動を始めた。重力加速度の大きさを g として、以下の各問いに答えよ。

(1) ばね定数はいくらか。

(2) おもりがつりあいの位置から距離 x だけ下側にあるとき、おもりにはたらく力の合力はいくらか。ただし、鉛直下向きを力の正の向きとする。

(3) おもりの単振動の振幅、周期はそれぞれいくらか。

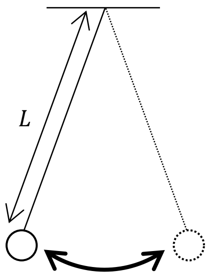
(4) おもりがつりあいの位置を通過するときの速さはいくらか。



（練習）軽いばねの上端を傾きの角 θ のなめらかな斜面上に固定し、下端に質量 m のおもりを取りつけると、ばねが自然の長さから d だけ伸びてつりあった。つりあいの位置からおもりを少し引き下げて静かにはなしたときに起こる振動の周期はいくらか。重力加速度の大きさを g とする。

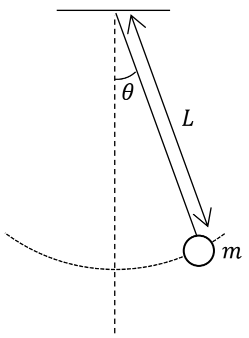
○単振り子（単振動の例）

単振り子 ＝ 糸に取りつけたおもりを振動させるもの



単振り子の周期 T ＝ ＿＿＿＿＿＿ と表すことができる。

おもりの質量に＿＿＿＿＿＿＿である。



おもりにはたらく力の

・大きさ ＝ ＿＿＿＿＿＿＿ ≒ ＿＿＿＿＿＿

角 θ が小さいとき、
$\sin\theta \fallingdotseq \theta$ と近似できる。

・向き：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

なので、おもりは

周期 T ＝ ＿＿＿＿＿＿

の単振動をする。

（練習）糸の長さが L で、周期が T の単振り子がある。周期を $\frac{T}{2}$ にするには、単振り子の糸の長さをいくらにすればよいか。

（練習）月面上では、重力加速度の大きさが地上のおよそ $\frac{1}{6}$ である。月面上では、糸の長さが L の単振り子の周期は地上の何倍になるか（$\sqrt{\ }$を使って答えよ）。

○単振動の力学的エネルギー

単振動する物体の力学的エネルギーは＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

↑

単振動する物体は、＿＿＿＿＿＿＿から仕事されないから

（例）

・ばね振り子：物体に仕事するのは＿＿＿＿＿と＿＿＿＿＿

・単振り子　：物体に仕事するのは＿＿＿＿＿だけ

（練習）なめらかな水平面上で、ばね定数 k の軽いばねの一端を壁に固定し、他端に質量 m のおもりを取りつけた。このおもりを引いて、ばねが自然の長さから L だけ伸びたところで静かにはなしたところ、物体は単振動した。単振動する物体の速さの最大値を求めよ。

（練習）質量 0.20 kg の物体が、振幅 5.0 cm で周期 0.50 s の単振動をしている。この単振動の力学的エネルギーはいくらか。円周率を 3.14 とする。

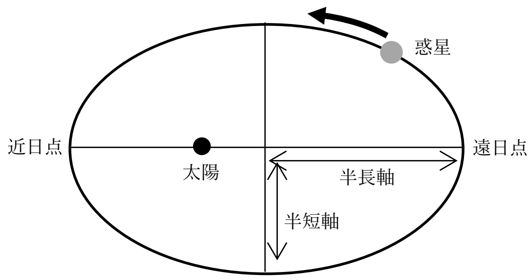
○惑星の運動

ケプラーの法則：惑星がどのような規則性に従って運動しているか明らかにしたもの

17 世紀（地動説が受け入れられてきた時代）に発見された

○ケプラーの第 1 法則

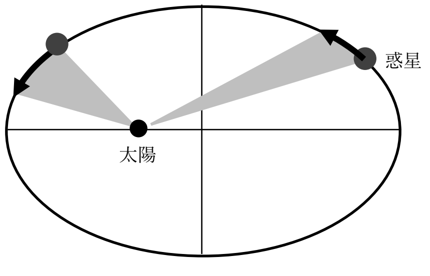
惑星は、太陽を 1 つの焦点とする＿＿＿＿＿＿＿軌道上を運動する



○ケプラーの第 2 法則

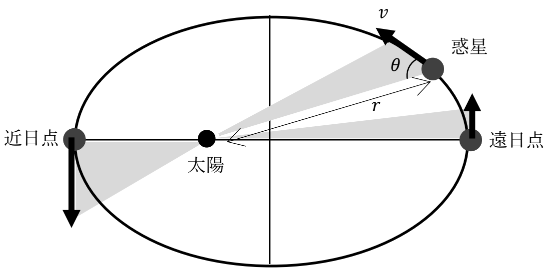
面積速度一定の法則

面積速度 ＝ 太陽と惑星を結ぶ線分が単位時間に通過する面積



※ 惑星は、太陽に近いときほど＿＿＿＿＿＿＿動いていることが分かる。

※ 面積速度の求め方



○ケプラーの第 3 法則

すべての惑星で $\dfrac{T^2}{a^3}$ の値が等しい。

T：惑星の公転周期　　a：楕円軌道の半長軸

⇩

公転周期の単位を________、半長軸の単位を______________とすると、

すべての惑星について

$$\frac{T^2}{a^3} = \_\_\_\_$$

となる。

1 天文単位 ＝ 地球の楕円軌道の____________

≒ 地球と太陽の______________

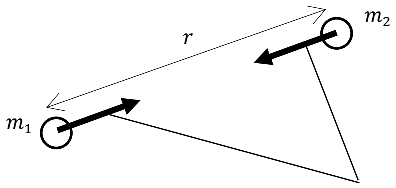
（練習）ある彗星の遠日点での太陽との距離は、近日点での太陽との距離の 4.0 倍ある。
この彗星が遠日点を通過する速さは、近日点を通過する速さの何倍か。

ケプラーの法則は、惑星に限らず
太陽からの引力によって運動するすべての天体で成り立つ。

（練習）地球の軌道の半長軸を 1 天文単位といい、地球の公転周期は 1 年である。半径が 4.0 天文単位の円軌道を描く小惑星と、半長軸が 2.0 天文単位の楕円軌道を描く彗星の公転周期はそれぞれ何年か（$\sqrt{2}$ ＝1.4 とする）。

○万有引力の法則

万有引力 ＝ あらゆる２つの物体の間にはたらく引力（__________が発見）



万有引力の大きさ F ＝ __________

２つの引力は__________と__________の関係にあるので、当然大きさが等しい。

※ ニュートンは、ケプラーの第３法則にヒントを得て万有引力の法則を発見した。

半径 r の円軌道を速さ v で運動する質量 m の惑星が太陽から受ける力 F は

惑星の運動を等速円運動に近似して考える。

F ＝ __________ … ①

と表すことができる。

また、ケプラーの第３法則から

r^3 ＝ ______ ＝ __________

と表せる。これを整理すると

v^2 ＝ __________ … ②

となる。

②を①へ代入すると、F ＝ __________ （ r^2 に反比例、m に比例）と求められる。

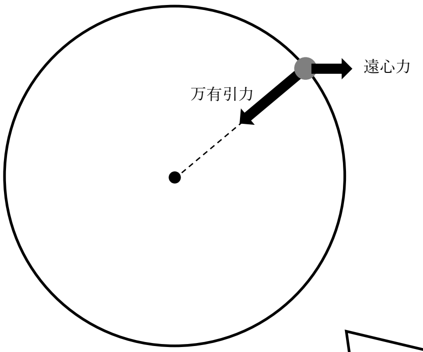
太陽も、同じ大きさ F の力を惑星から受けるはずである。つまり、太陽は惑星の質量 m に比例する力を受けることが分かる。そうであるなら、惑星も太陽の質量に比例する力を受けるはずであると分かり、F は太陽の質量にも比例すると分かる。

（練習）質量 60 kg の人が２人、0.60 m 離れて立っている。この２人の間にはたらく万有引力の大きさを求めよ。ただし、人の大きさは考えないものとし、万有引力定数を 6.67×10^{-11} N・m²/kg² とする。

（練習）月の半径は地球の約 $\dfrac{3}{11}$ 倍であり、質量は地球の約 $\dfrac{1}{81}$ 倍である。月面上で月から受ける万有引力（重力）の大きさは、地上で受ける万有引力のおよそ何分の１となるか。ただし、月および地球から受ける万有引力の大きさは、その全質量が月（または地球）の中心にあるものとして求められる。

○万有引力と重力の違い

重力 ＝ 万有引力と＿＿＿＿＿＿の合力



重力は、地球の中心からほんの少しずれたところに向いていることが分かる。

※ 地球上で重力（重力加速度）が

・最大となるのは：＿＿＿＿＿や＿＿＿＿＿

・最小となるのは：＿＿＿＿＿＿＿

であることが分かる。

万有引力の大きさ ＿＿＿＿ 遠心力の大きさ なので、

重力 mg ≒

＿＿＿＿＿＿

と表せ、ここから

重力加速度 g ≒

＿＿＿＿＿

と表せることが分かる。

M：地球の質量
R：地球の半径
G：万有引力定数

（練習）地球を半径が 6.4×10^{6} m の球とみなし、極における重力加速度の大きさを 9.8 m/s^{2} として、地球の質量を求めよ。また、地球の自転周期を 24 時間（$=8.6\times10^{4}$ s）とすると、赤道において、遠心力の大きさは万有引力の大きさのおよそ何分の 1 か。万有引力定数を 6.67×10^{-11} N･m^{2}/kg^{2} とする

（練習）地表からの高さが h のところでの重力加速度の大きさを、地表における重力加速度の大きさ g と地球の半径 R を用いて表せ。

（練習）地球の周りを、半径 r の円軌道を描いて質量 m の人工衛星が速さ v で運動している。万有引力定数を G 、地球の半径を R 、地球の質量を M 、地上での重力加速度の大きさを g として、以下の各問いに答えよ。

（1）人工衛星の速さを、g 、R 、r を用いて表せ。

（2）人工衛星の周期を、g 、R 、r 、円周率 π を用いて表せ。

（練習）地表すれすれを回りつづける人工衛星の速さを「第 1 宇宙速度」という。上の練習で得られた答えをもとに、第 1 宇宙速度の値を求めよ。ただし、地球の半径を 6.4×10^6 m、重力加速度の大きさを 9.8 m/s² 、$\sqrt{2}$ ＝1.4 とする。

多くの人工衛星は、地表すれすれを回っている。

（練習）地上から常に同じ位置に見える（静止して見える）衛星は「静止衛星」と呼ばれる。

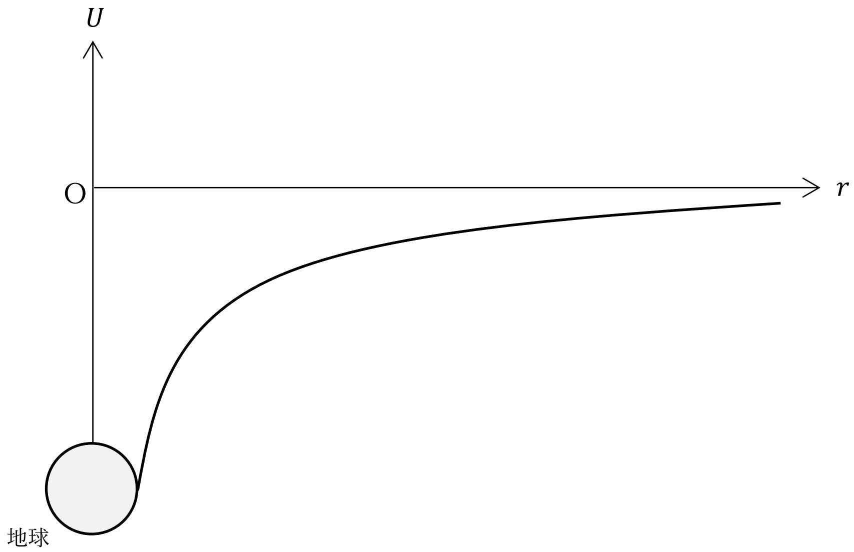
静止衛星は、赤道上空を地球の自転周期と同じ周期（24 時間＝8.6×10^4 s）で等速円運動している。前頁の上の練習の答えを利用して、静止衛星の軌道半径を求めよ。そして、その値が地球の半径の何倍であるか求めよ。地球の半径を 6.4×10^6 m、重力加速度の大きさを 9.8 m/s^2 とし、$\sqrt[3]{75.3}=4.22$ とする。

○万有引力による位置エネルギー

質量 M の地球の中心から距離 r に位置する質量 m の物体は

$$U = -G\frac{Mm}{r}$$

と表される「万有引力による位置エネルギー」を持つ。



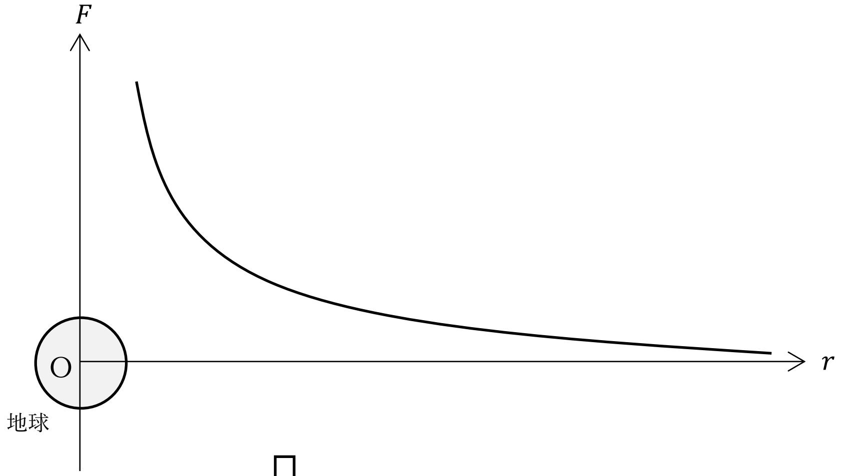
※ 万有引力の位置エネルギーは、＿＿＿＿＿＿を基準点としている。

基準点 ＝ 位置エネルギーが＿＿＿＿となる点

※ 重力の位置エネルギー mgh は、地表付近（ h が小さいとき）でだけ使える式である。天体や人工衛星などの運動を考えるときには、万有引力の位置エネルギー $-G\dfrac{Mm}{r}$ を使って考える。

※ 万有引力による位置エネルギー $-G\dfrac{Mm}{r}$ は、次のように導き出される。

質量 m の物体に地球からはたらく万有引力 F は、地球からの距離 r によって次のように変化する。



⇩

物体を地球から距離 r の点から無限遠まで運ぶには、万有引力に逆らって

______________ だけ仕事する必要があることが分かる。

⇩

地球から距離 r の点に比べて、無限遠では位置エネルギーが $G\dfrac{Mm}{r}$ だけ

____________ ことが分かる。

⇩

無限遠での位置エネルギーを 0 とすると（無限遠を基準点とすると）、

地球から距離 r の点での位置エネルギーは ____________ になる。

○万有引力を受ける物体の運動

天体（惑星、衛星など）や人工衛星は、万有引力だけを受けて運動する

… 万有引力は＿＿＿＿＿＿なので、万有引力だけを受けて運動する

物体の力学的エネルギーは＿＿＿＿＿＿＿＿

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＋＿＿＿＿＿＿＿＿＿＝ 一定 と表すことができる。

（練習）地表から大きな初速度で打ち上げられた物体は、再び地球へ戻ることなく無限遠へ飛んでいく。物体が無限遠へ飛んでいくのに必要なギリギリの初速度の大きさを「第２宇宙速度」という。第２宇宙速度の値を求めよ。ただし、地球の半径を 6.4×10^{6} m、地表における重力加速度の大きさを 9.8 $\mathrm{m/s^2}$ とする。

惑星探査機などには、このような速度を与える必要がある。

（練習）万有引力定数 G 、地球の質量 M 、地球の半径 R を用いて、第２宇宙速度 v は

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

と表されることが、前頁の練習から分かる。
さて、この式へ太陽の質量と半径を代入すれば、太陽における第２宇宙速度を求められる。しかし、ここではそれを行わず、太陽における第２宇宙速度が光速 3.0×10^{8} m/s になるための半径を考えたい。
太陽の質量は、地球の質量の 3.3×10^{5} 倍であるとする。また、光速は地球における第２宇宙速度（11.2 km/s）の 2.7×10^{4} 倍であるとする。太陽における第２宇宙速度が光速となるには、太陽の半径が地球の半径のおよそ何倍になればよいか。

$\frac{3.3}{2.7^2} = 0.45$ として計算せよ。

太陽がこのサイズにまで縮めば、ブラックホールになる。