

物 理

1 図1のように、水平な地面から高さ $2l$ [m] の位置に固定された点 P に長さ l [m] の糸の一端をつなぎ、糸の他端には質量 m [kg] のおもりをつける。はじめ、糸と鉛直下向きとのなす角を $\frac{\pi}{3}$ rad にして、おもりを静止させておく。時刻 $t = 0$ [s] におもりを静かに離れた。その後、おもりは点 P の真下に到達し、時刻 t_1 [s] に鉛直下向きに対する糸の傾斜角が初めて θ [rad] になった。この時刻におもりを糸から切り離すと、おもりは時刻 t_2 [s] に地面上の点 X_1 に落下した。点 P を通る鉛直線と地面との交点を X_0 として、点 X_0 から点 X_1 までの距離 d [m] を求めよう。ただし、重力加速度の大きさを g [m/s²] とし、おもりの大きさ、糸の質量、空気抵抗は無視でき、糸はたるまないものとする。また、図1のように、水平右向きに x 軸、鉛直上向きに y 軸をとり、角度 θ の正の向きを反時計回りにとる。以下の文章中の (1) ~ (8) に適切な数式を入れよ。また、(a) ~ (d) では選択肢から適切な数式を選び、記号で答えよ。問3では、文章中の指示に従って理由を説明せよ。

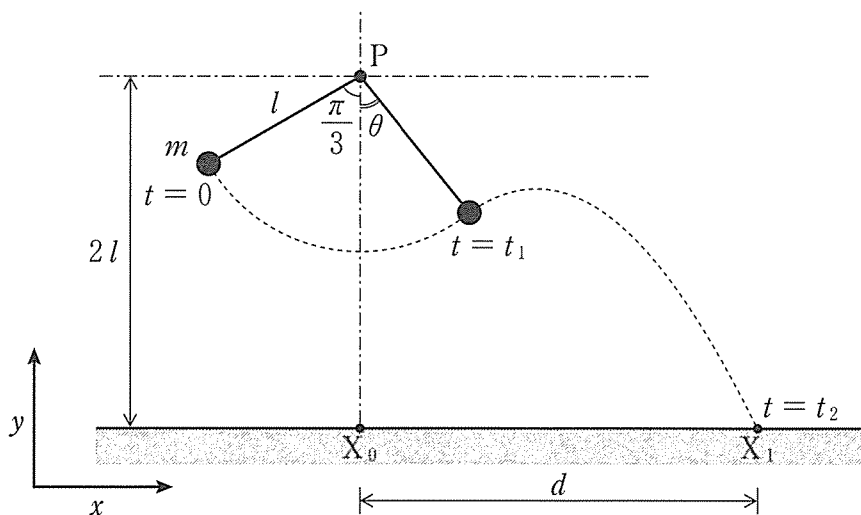


図 1

問 1 はじめに、おもりを切り離す際の糸の傾斜角 θ が 0 rad と $\frac{\pi}{3}$ rad のときの距離 d を考えよう。 $\theta = 0$ の場合、時刻 $t = 0$ でのおもりの重力による位置エネルギーは、時刻 t_1 における値よりも (1) [J] だけ大きいので、力学

的エネルギー保存の法則から、時刻 t_1 におけるおもりの速度の大きさは $\boxed{(2)}$ [m/s] となる。この速度の y 成分が 0 であることを考慮すると、糸が切り離されてからおもりが地面に落下するまでの時間は $\boxed{(3)}$ [s] となる。したがって、 $\theta = 0$ に対する距離 d は $\boxed{(4)}$ [m] である。一方、 $\theta = \frac{\pi}{3}$ の場合は、時刻 t_1 におけるおもりの速さが 0 となることから、 $d = \boxed{(5)}$ [m] であることがわかる。

問 2 つぎに、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ にある任意の角度 θ に対する距離 d を考えよう。力学的エネルギー保存の法則より、時刻 t_1 におけるおもりの速度の大きさは $v = \boxed{(6)}$ [m/s] となる。この速度の x 成分 v_x [m/s] は $v \times \boxed{(a)}$ [m/s]、 y 成分 v_y [m/s] は $v \times \boxed{(b)}$ [m/s] である。このときのおもりの地面からの高さは $\boxed{(7)}$ [m] であるので、おもりが糸から切り離されてから地面に落下するまでの時間は v_y を用いて $\boxed{(8)}$ [s] と表され、これを l 、 θ 、および g のみを使って表すと $\sqrt{\frac{l}{g}} \left(\sqrt{\boxed{(c)}} \times \sin \theta + \sqrt{\boxed{(d)}} \right)$ [s] となる。したがって、距離 d は $l \left[\sin \theta + \left(\boxed{(c)} \right) \times \sin \theta \cos \theta + \sqrt{\left(\boxed{(c)} \right) \times \left(\boxed{(d)} \right)} \times \cos \theta \right]$ [m] となり、 m や g によらず、 l に比例することがわかる。

問 3 問 2 で求めた距離 d は、 $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ の範囲内のある θ において最大となる。この理由を、十分に小さな θ に対する d の大きさと、 $\theta = 0$ および $\frac{\pi}{3}$ に対する d の大きさを比較することにより説明せよ。なお、十分に小さな θ に対する d を求める際、 $\sin \theta \doteq \theta$ および $\cos \theta \doteq 1$ としてよい。

$\boxed{(a)}$ ~ $\boxed{(d)}$ の選択肢

(ア) $\sin \theta$	(イ) $\cos \theta$	(ウ) $1 - \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \theta$
(エ) $2 \cos \theta - 1$	(オ) $1 - \frac{4}{3} \sin^2 \theta$	(カ) $\frac{4}{3} \cos^2 \theta - \frac{1}{3}$
(キ) $3 + \cos \theta - 2 \cos^2 \theta$	(ク) $3 + \cos^2 \theta - 2 \cos^3 \theta$	
(ケ) $3 + \cos^3 \theta - 2 \cos^4 \theta$		

2 図1のように、一端を閉じたまっすぐで細いガラス管の内部に n [mol] の理想気体を水銀で封じ込め、これを外部の圧力 p_0 [Pa] の下に置く。ガラス管の内径は一様で、その断面積は A [m²] である。水銀は、質量が m [kg] であり、ガラス管の中を形を変えずになめらかに動くことができる。この理想気体の定圧モル比熱を C_p [J/(mol·K)]、定積モル比熱を C_v [J/(mol·K)]、比熱比 $\frac{C_p}{C_v}$ を γ 、気体定数を R [J/(mol·K)]、重力加速度の大きさを g [m/s²] とする。また、ガラス管の熱容量、水銀と理想気体の間の熱の移動、ガラス管および水銀の熱膨張、水銀の蒸発は無視できるものとする。次の文章中の (1) ~ (10) に適切な数式を入れよ。また、問2は解答欄に作図せよ。

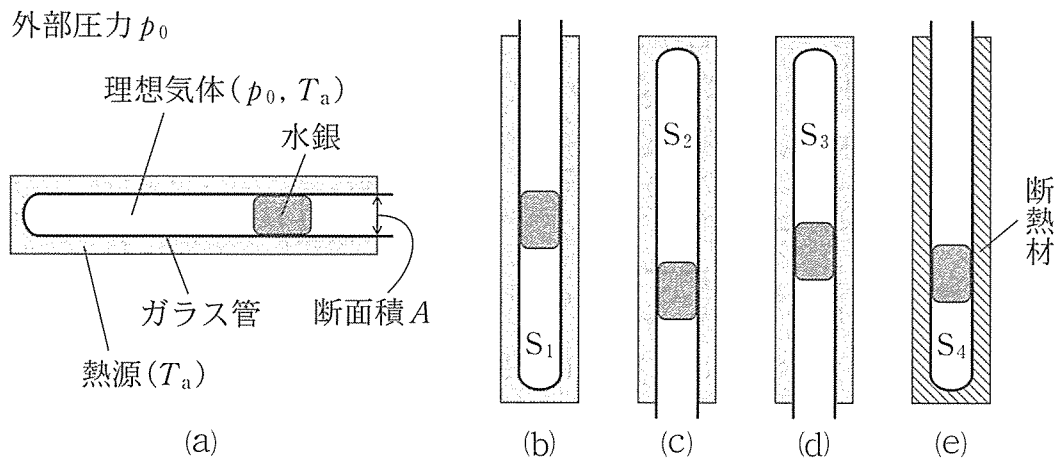


図1

問1 はじめに、任意の温度に調節できる熱源でガラス管を囲み、これを図1(a)のように水平においた。このとき、熱源と理想気体の温度はともに T_a [K] であり、理想気体の圧力は外部の圧力 p_0 [Pa] と等しい。この状態から気体の温度を一定に保ったままガラス管の向きをゆっくりと変え、その開口部を図1(b)のように鉛直上向きにしたところ、水銀は移動し、ある位置で静止した。このときの気体の状態を S_1 とする。状態 S_1 における気体の圧力 p_1 [Pa] は (1) [Pa] であり、その体積は p_1 を用いて表すと (2) [m³] となる。この状態から気体の温度を一定に保ったままガラス管の向きをゆっくりと反転させ、開口部を鉛直下向きにしたところ、水銀はある距離

だけ移動して静止した(図 1(c))。このときの気体の状態を S_2 とする。状態 S_2 における気体の圧力 p_2 [Pa] は [Pa] である。また、状態 S_1 から状態 S_2 への変化にともなう気体の内部エネルギーの変化は 0 J である。ここで、気体の温度を T_a [K] から T_b [K] にゆっくりと低下させたところ、水銀は移動し、ある位置で静止した(図 1(d))。このときの気体の状態を S_3 とする。状態 S_2 から状態 S_3 に変化する過程で、気体は熱源に対して [J] の熱量を放出し、外部から [J] の仕事をされる。したがって、この過程での気体の内部エネルギーの変化は、 C_p 、 T_a 、 T_b を用いて [J] と表される。

問 2 解答用紙の p - V 図(気体の圧力 p [Pa] と体積 V [m^3] の関係図)には、温度 T_a と T_b の 2 本の等温線と状態 S_1 を表す点が描かれている。また、図の縦軸上には圧力 p_0 を表す目盛りが記されている。この p - V 図上に、状態 S_2 と S_3 を表す 2 つの点を黒丸(\bullet)で示せ。

問 3 気体の状態を S_3 に保ちながら、図 1(d)のガラス管のまわりの熱源を断熱材と交換した。このガラス管の向きをゆっくりと反転させ、開口部を鉛直上向きにしたところ、水銀はある距離だけ移動して静止した(図 1(e))。このときの気体の状態を S_4 とする。状態 S_3 から状態 S_4 への変化は断熱変化であるため、気体の圧力 p [Pa]、体積 V [m^3]、比熱比 γ の間には、 $pV^\gamma = \text{一定}$ の関係が成り立つ。この関係より、状態 S_4 における気体の体積と温度は、 p_1 、 p_2 、 T_b を用いて、それぞれ [m^3] および [K] と表される。したがって、状態 S_3 における気体の温度 T_b が [K] の場合、状態 S_4 は S_1 と同じ状態になる。このとき、状態 S_3 から状態 S_4 への変化にともなう気体の内部エネルギーの変化は、 T_a 、 T_b を用いて表すと [J] となる。また、 $S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_3 \rightarrow S_4$ (S_1) の過程での気体の内部エネルギーの変化は 0 J である。以上の結果を考慮すると、 $C_p - C_v = R$ の関係が成り立つことがわかる。

3 以下の文章中の (1) ~ (4) に有効数字2桁の数値を、
 (5) ~ (10) に数式を記入せよ。また、(a) と (b) では
 選択肢中の適切なものを○で囲め。

問 1 室温が $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ の実験室で白熱電球に電源をつなぎ、電球の金属フィラメントに加える電圧を 0.0 V から 4.0 V まで少しずつ増加させ、フィラメントに流れる電流を測定する。この実験では、電圧を増加させるごとに十分な時間をおいて、電流が一定になってから測定を行う。 $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ のとき、このフィラメントが $R_{20} =$ (1) $[\Omega]$ の抵抗値をもつことから、フィラメントに加わる電圧と流れる電流の間に図1の直線(破線)の関係を予想した。ところが、測定結果は図1の曲線(実線)になった。これは、ジュール熱によりフィラメントの温度が上昇し、その抵抗値が増大したためである。フィラメント内の温度は均一であるとして、 4.0 V の電圧を加えたときのフィラメントの温度 $t[{}^{\circ}\text{C}]$ を推定しよう。図1から、 4.0 V のときのフィラメントの抵抗値 $R_t[\Omega]$ は、 R_{20} の (2) 倍であることがわかる。図2は、フィラメントの抵抗値 $R[\Omega]$ の温度変化を、横軸に温度、縦軸に $\frac{R}{R_0}$ をとって表している。ここで、 $R_0[\Omega]$ は $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ でのフィラメントの抵抗値である。この図と $\frac{R_t}{R_{20}}$ の値から、電圧が 4.0 V のときのフィラメントの温度 t は約 (a) 70, 100, 130, 160 $[\text{ }^{\circ}\text{C}]$ と得られる。

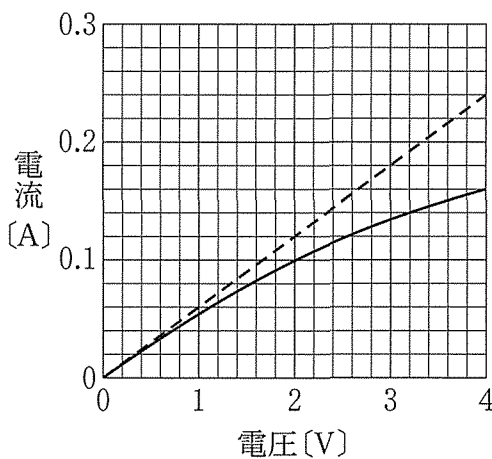


図 1

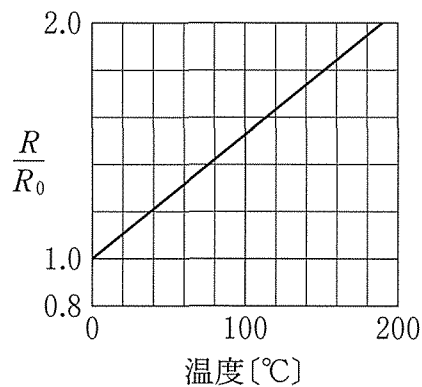


図 2

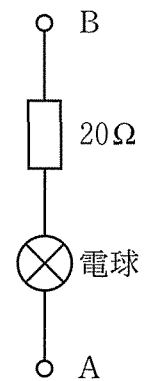


図 3

つぎに、この電球と $20\ \Omega$ の抵抗を図3のように直列に接続し、その両端AとBの間に $4.0\ \text{V}$ の電圧をかける。十分に時間がたつと、電流は [A] となり、フィラメントは1秒間に [J] のジュール熱を発生する。ただし、電球に接続した抵抗の値は変化しないものとする。直線を描くために必要なら、問題冊子の縁^{ふち}などを用いよ。

問2 金属の電気抵抗とジュール熱について、自由電子の運動に基づいて考察しよう。図4のように、断面積 $S[\text{m}^2]$ 、長さ $l[\text{m}]$ の金属棒の両端CとDの間にCの電位が高くなるように電圧 $V[\text{V}]$ を加える。ただし、自由電子の電荷を $-e[\text{C}]$ 、質量を $m[\text{kg}]$ とし、金属棒内の電場と電流は一様であるとする。

金属中の自由電子は、熱振動している正イオンと衝突しながら運動している。金属棒の内部には大きさが [V/m] の電場があり、自由電子は図4の CからD, DからCの向きに加速される。自由電子は、時間 $T[\text{s}]$ ごとに正イオンと衝突し、そのたびに電場から得た運動エネルギーをすべて失い、その速さが $0\ \text{m/s}$ になると仮定しよう。そうすると、衝突直前の自由電子の速さは [m/s] となり、 $T[\text{s}]$ 間の平均の速さは $\frac{1}{2} \times$ [m/s] となる。このことより、 $1\ \text{m}^3$ 中に n 個の自由電子があるとすると、電流は V を用いて [A] と表され、金属棒の抵抗は n, l, S を用いて表すと [Ω] となる。一方、1個の自由電子は1秒間に運動エネルギー [J] を失う。自由電子の失った運動エネルギーがすべて熱に変わるとすると、金属棒において1秒間に発生する熱は [J] と表され、金属棒において消費される電力と一致する。このように、金属の電気抵抗やジュール熱の発生のおくみを自由電子の運動から理解することができる。

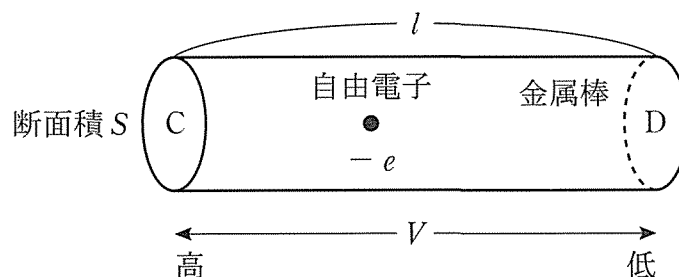


図4