

物 理

(3 問題 100 点)

物理問題 I

次の文章を読んで、には適した式か値を求め、{ }からは適切なものを選びその番号を、それぞれの解答欄に記入せよ。また、問1、問2では、指示にしたがって、解答をそれぞれの解答欄に記入せよ。ここで、円周率は π とする。

図1のように質量 M の台車の上に大きさの無視できる質量 m の小球が、2本のばねによって取り付けられている。この2本のばねは、ばね定数 k と自然長が等しく、質量は無視できる。はじめ、2本のばねは自然長の状態で、小球は台車の中央にある。台車は摩擦なしに水平面上を動くことができ、台車と小球の間の摩擦も常に無視できるものとする。 x 軸は右方向を正とし、台車も小球も x 軸に平行な方向へのみ動き、ばねは常に x 軸に平行であるものとする。

(1) はじめに、台車を動かさないように押さえながら、図2のように小球を台車の中央から l だけ左方へ引っ張ったところで、小球と台車を同時に離した。離れた直後の小球の加速度は、2本のばねから x 軸の正の方向へそれぞれ kl の力を受けるので で与えられ、一方、台車の加速度は、2本のばねから x 軸の負の方向にそれぞれ kl の力を受けるため で与えられる。

小球が台車の中央を通過するときの小球の速さは , 台車の速さは となる。

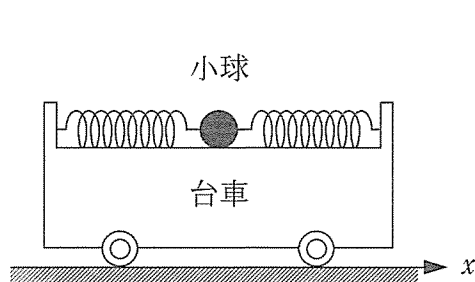


図 1

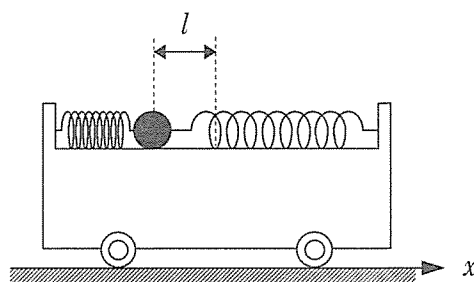


図 2

- (2) 次に、同じ台車と小球について、図3のように固定壁に台車の左端が接した状態(台車は壁に固定していない)にして、時刻 $t = 0$ のときに小球に壁の方向へ初速 v_0 を与えた。このとき、小球と台車の中心、および台車と小球を合わせた系の重心は $x = 0$ の位置にあり、小球は台車の端までは届かないものとする。

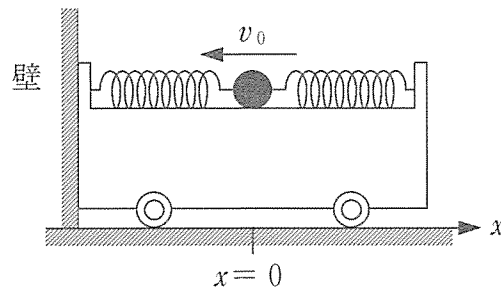


図3

その後の台車と小球の動きを考える。台車は、ばねから壁の方向へ力を受けるため、しばらく壁から離れない。その間の台車、小球の加速度をそれぞれ a_1 、 a_2 とし、台車が壁から受ける垂直抗力を N 、小球の台車中央からの変位を d とすると、それぞれの運動方程式は、

$$\text{台車} : Ma_1 = \boxed{\text{オ}}$$

$$\text{小球} : ma_2 = \boxed{\text{カ}}$$

となる。台車が壁に接している間の小球の変位 d は、小球に初速を与えてからの経過時間 t 、および v_0 、 k 、 m を用いて、

$$d = \boxed{\text{キ}}$$

となる。垂直抗力 N が0になったときに台車は壁から離れる。台車が壁から離れるまでの経過時間は $\boxed{\text{ク}}$ となる。

(3) 台車が壁から離れたあとの、台車と小球の動きを考える。

問 1 台車が壁から離れたあと台車からみた小球の動きは単振動となることを、導出の過程と共に示せ。また、そのときの角振動数 ω を求めよ。

台車と小球を合わせた系の重心は {ケ: ①静止 ②等速直線運動 ③単振動} しているので、台車が壁から離れてからの経過時間を t_1 とすると、この系の重心の位置は となる。これらから、 x 座標での台車の中心の位置は t_1, v_0, ω, m, M を用いると となり、台車の速度の最大値は , 最小値は となる。

問 2 以下の図 4 を解答欄に書き写し、時刻 $t = 0$ で小球に初速を与えたあとの、台車と小球を合わせた系の重心の x 座標の位置を破線で、台車の中心の x 座標の位置を実線で、グラフを描け。

また、台車が壁から離れたあと最初に台車の速度が最大値をとる点 A をグラフ中に示し、その x 座標および時刻 t の式を記せ。

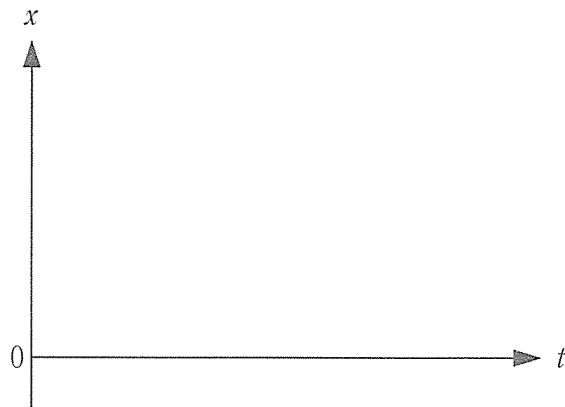


図 4

物理問題 II

次の文章を読んで、 に適した式か値を、それぞれの解答欄に記入せよ。
なお、 は、すでに で与えられたものと同じ式を表す。また、問
1、問2では指示にしたがって、解答をそれぞれの解答欄に記入せよ。ここで、円周
率は π 、真空中の誘電率は ϵ_0 とする。

(1) 電気容量の機能および抵抗の機能を備えているコンデンサーについて考える。

図1に、ある物質を2枚の平らな金属板の電極ではさんだコンデンサーと、直
流電源からなる回路を示す。この物質は、底面積 S で高さ h の円筒形をしてい
て、内部は均一である。まず、両端の端子に直流電源を用いて直流電圧 V_0 を加
えると、一定に落ち着いた状態において直流電流 I_0 が流れた。ここで、電界と
しては電極に垂直なもののみが存在していると仮定してよい。このとき、抵抗は
 イ と表される。また、この物質の抵抗率は **ロ** と求められる。

次に、図2に示すように、交流電源を用いて、同じコンデンサーに角周波数 ω
が ω_0 である交流電圧 $V_0 \sin \omega_0 t$ を加え、一定に落ち着いた状態となった。もし
これが、コンデンサーではなく抵抗値が **イ** の純粋な抵抗ならば、交流電
流として **ハ** が流れる。しかし、実際には図3に示すような電流が流れた
ので、このコンデンサーは抵抗の機能と電気容量の機能をともに備えていること
が確認できた。以下では、このコンデンサーを図4の等価回路で考える。電気容
量の機能のみのコンデンサーの場合、流れる電流は電圧より位相が **ニ** だ
け進む。しかし、ここでは図3の位相関係にあるので、図4に示された電気容量
は **ホ** であり、電極ではさまれた物質の比誘電率は、 **ヘ** と求めら
れる。また、交流電流の振幅値は、 I_0 を用いて **ト** である。

問1 (1)とは異なる抵抗率の物質を用いて、角周波数が $2\omega_0$ のときに、交流
電圧に対する交流電流の位相のずれが(1)と同じく $\frac{\pi}{4}$ となるコンデンサー
を設計する。(1)の場合と比誘電率および形状が全く同じ物質を用いる場
合、物質の抵抗率は(1)の場合と比較して何倍にすればよいかを説明せよ。
導出過程も合わせて示せ。

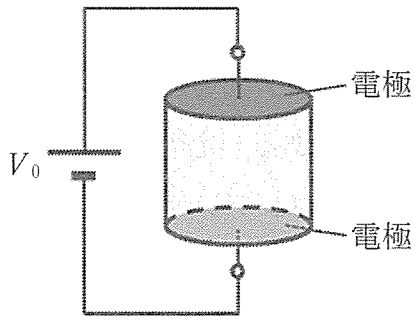


図 1

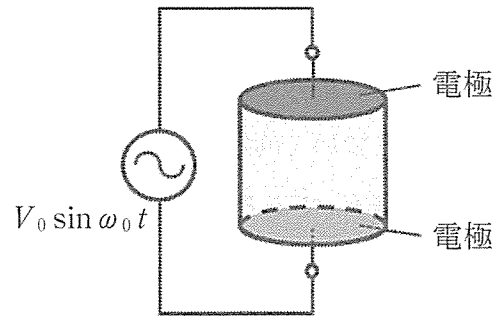


図 2

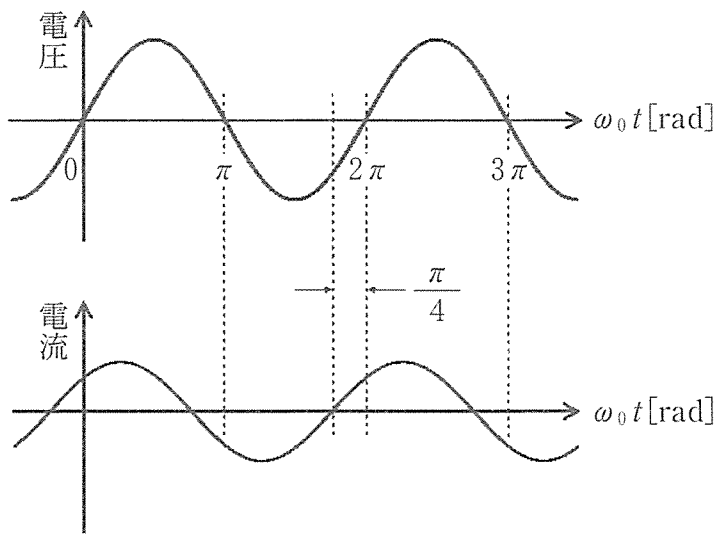


図 3

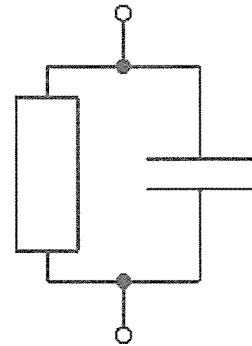


図 4

この問題は、次のページに続いている。

(2) 図1と図2に示したコンデンサーの特性が、(1)の検討から、図4のように表せることがわかったので、ここでは直流電圧を加えた直後のこのコンデンサーの動作について考察しよう。図5に示すような、ある一定の内部抵抗 r をもち電源電圧が V_0 である直流電源を用いた場合、このコンデンサーに加わる電圧や流れる電流は、スイッチを閉じた直後は変化し、しばらくして一定に落ち着いた。この現象は、以下のように理解できる。

一般に、電気容量 C のコンデンサーに電荷 Q が蓄積されているとき、コンデンサーの両端に現れる電圧は である。図5の場合には、スイッチを閉じた直後には電気容量の部分に電荷は存在しないので、コンデンサーの両端の電圧は となり、電流は となった。一方、十分に時間が経過した後、電圧が一定となる状態においては、電気容量の部分には電荷が一定に蓄積されていて電荷の出入りはなく、電流は となった。このような電流の時間変化の様子は、図6のようになった。

問2 電流が図6に示すように流れたことをふまえて、コンデンサーの両端の端子間に現れる電圧の変化を、縦軸を電圧、横軸を時間とするグラフで示せ。ここで、スイッチを閉じた瞬間の電圧値と、電圧の値が一定に落ち着いた後の電圧値をグラフ内に明記すること。導出過程も合わせて示せ。

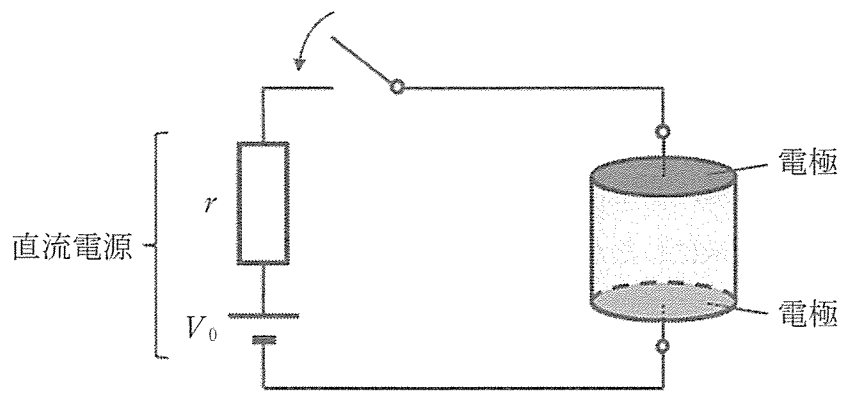


図 5

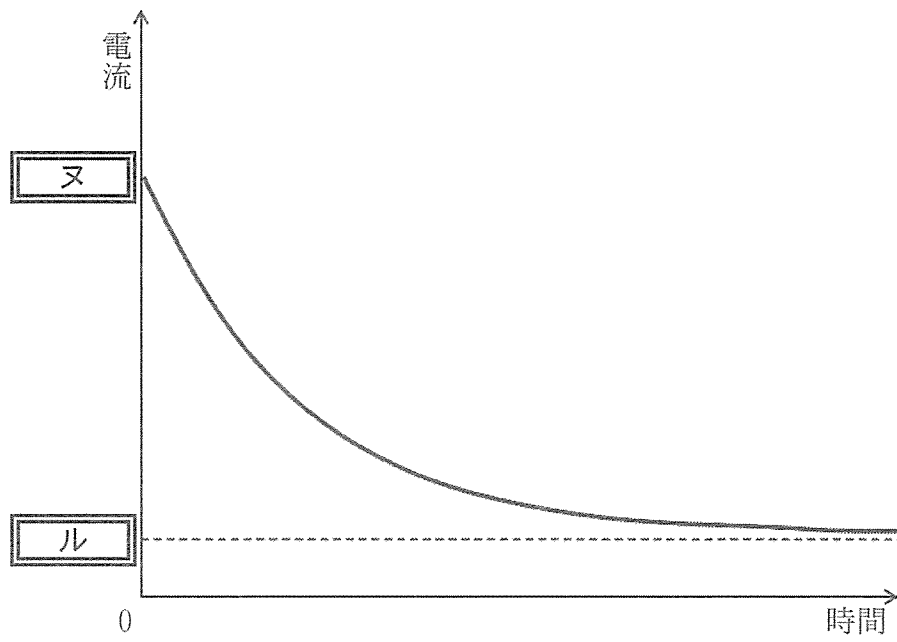


図 6

物理問題 III

次の文章を読んで、 に適した式か値を、それぞれの解答欄に記入せよ。
なお、 は、すでに で与えられたものと同じ式を表す。また、問1、問2では、指示にしたがって、解答をそれぞれの解答欄に記入せよ。

気体が外部と熱のやりとりをすることなく行う状態変化を、断熱変化という。以下では、断熱変化を気体の分子運動および熱機関のサイクルから考えてみる。なお、気体は単原子分子の理想気体とする。

(1) 断熱変化を気体の分子運動から考察するため、図1に示すように、周囲から断熱されたシリンダー内に気体が封入されている場合を考える。ピストンはなめらかで摩擦は生じないものとする。ここで、シリンダー内の断面積は S 、シリンダー内の初期長さは L 、初期体積は $V = SL$ である。シリンダー内には質量 m の分子が多数存在し、運動している。

分子と完全弾性衝突するような平板でできたピストンを、速さ v_p で左方向に動かし、中の気体を圧縮する場合を考える。ここでは、分子とピストンは完全弾性衝突と仮定することにより、ピストンから気体に加えた仕事がすべて気体内の運動エネルギー(= 内部エネルギー)に変換されることで、断熱条件に相当すると考える。なお、分子はピストンに比べはるかに大きい速さで運動しているとし、以下で考察する微小時間 Δt の間にピストンが移動する距離は初期のシリンダー長 L に比べて十分小さいものとする。また、必要ならば、 a を任意の実数とするととき、絶対値が1より十分小さな実数 δ ($|\delta| \ll 1$) に対し、 $(1 + \delta)^a \doteq 1 + a\delta$ が成り立つとしてよい。

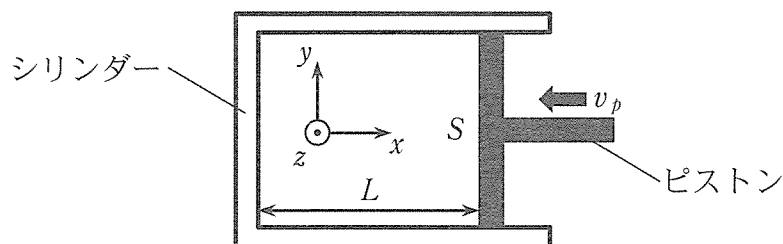


図1

ここで1個の分子に注目しよう。この分子は x , y , z 方向にそれぞれ速さ v_x , v_y , v_z で運動しており、初期状態では、それらは等しいとする。ピストンが静止しているときは、分子がピストンに衝突しても、分子の x 方向の速さ(絶対値)は変わらない。しかし、ピストンが速さ v_p で移動している場合、分子がピストンと1回衝突すると、分子の x 方向の速さは $\Delta v_x = 2v_p$ だけ増加する。したがって、1回の衝突で運動エネルギー e は、 $\Delta v_x \ll v_x$ であることに注意すると、 $\Delta e =$ だけ増加すると近似できる。この1個の分子の x 方向の運動について微小時間 Δt を考えると、衝突回数 n は (分子の速さは初期の値 v_x のままであると近似してよい)となる。したがって、 n 回の衝突により1個の分子のエネルギー増加量 Δe_n は、 の n 倍になると近似的に考えると $\Delta e_n =$ $\times mv_x^2$ となる。ここで、 Δt の間にピストンが左側に移動する距離を $-\Delta L$ (ΔL はピストンの変位で、この場合負の値であることに注意せよ)とすると、 から v_p を消去して $\Delta e_n =$ と表すことができる。

以下では、上記の分子の運動が気体を構成する全分子の平均的な状態を表していると単純化して考えよう。この場合、初期状態の1個の分子の運動エネルギー e は x , y , z の運動エネルギーを合わせて $e =$ $\times mv_x^2$ と表され、系の温度 T はボルツマン定数 k を用いて $T =$ $\times mv_x^2$ となる。これに対し、 n 回のピストンとの衝突で増加した x 方向の運動エネルギー Δe_n が、引き続き分子間の衝突でどの方向にも均等になると考えれば、先と同様の考え方から、系の温度変化 ΔT は $\times mv_x^2$ となり、 ΔT と ΔL の間に $\frac{\Delta T}{T} =$ という関係式が得られる。この関係式は、断熱圧縮あるいは断熱膨張にともなって温度が増加あるいは減少することを示している。また、前述のように $V = SL$ の関係があり、 S は一定であるので L と V は比例関係にあるものとして、 $TV^{\frac{2}{3}} =$ 一定という関係式が得られる。なお、これを圧力 p と体積 V の関係式で書き換えると $p \times$ $=$ 一定となる。

(2) 断熱変化を含む熱機関のサイクル

を考える。熱機関のサイクルの装置には、単原子分子の理想気体が1モル入っており、摩擦は生じないものとする。気体定数を R とするとき、装置内に入っている気体の定積モル比熱は $\frac{3}{2}R$ である。なお、気体が外部から吸収した熱量は正で、気体が外部に放出した熱量は負で表すことにする。

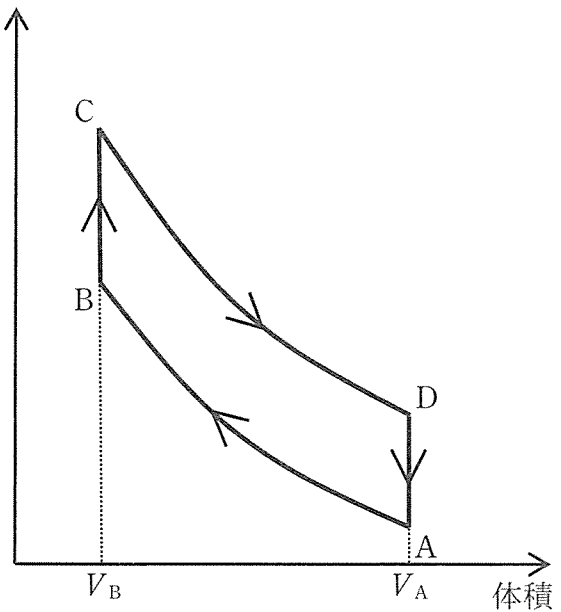


図 2

図 2 に示すように、断熱変化と定積変化からなる熱機関のサイクル

①を考える。体積 V_A の状態 A から体積 V_B の状態 B になるまで断熱圧縮した。次に、状態 B から状態 C になるまで定積で加熱したのち、状態 C から状態 D になるまで断熱膨張した。最後に、状態 D から状態 A になるまで定積で放熱した。

状態 A の温度を T_A 、状態 B の温度を T_B 、状態 C の温度を T_C ($T_C > T_B$)、状態 D の温度を T_D ($T_D > T_A$) とすると、1 サイクルにおいて、気体が外部から吸収した熱量は であり、気体が外部に放出した熱量は となる。したがって、このサイクルの熱効率は となる。理想気体の断熱変化では、分子運動モデルで示したように、 $TV^{\frac{2}{3}} = \text{一定}$ である。この関係式を用いると、体積の比 $\frac{V_A}{V_B}$ を ϵ ($\epsilon > 1$) とした場合のサイクル①の熱効率は となり、このサイクルの熱効率は体積比のみに依存することがわかる。

次に、熱機関のサイクルにおける断熱変化と等温変化の相違について考えてみる。図2で考えたサイクル①に対し、次の1. と2. のような変化をともなうサイクル②を考える(状態Aおよび状態Cはそのままである)。

1. 状態Aから等温圧縮で状態B'となり、その後、定積加熱で状態Cに至る
2. 状態Cから等温膨張で状態D'となり、その後、定積放熱で状態Aに至る

問1 図2を解答欄に書き写し、サイクル②の状態変化を破線で図示せよ。ただし、両者が重なるところは実線とせよ。なお、状態Bと状態B'および状態Dと状態D'の違いがわかるように図示すること。また、サイクル①とサイクル②で、気体が外部にする仕事はどちらが大きいかを、図を使って説明せよ。

問2 以下の図3を解答欄に書き写し、サイクル①の状態変化を実線で、サイクル②の状態変化を破線で図示せよ。ただし、両者が重なるところは実線とせよ。なお、状態Bと状態B'および状態Dと状態D'の違いがわかるように図示すること。

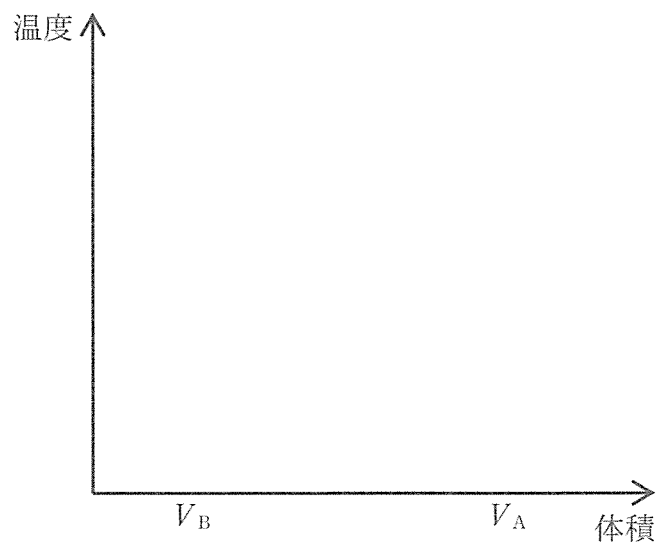


図3

物理問題は、このページで終わりである。