物理　問題 I

図1のように，なめらかな水平面PQがあり，その両端の点P，Qから左右に斜面がつながっている。その面上を大きさが無視できる質量mの2つの物体A，物体Bが運動する。左側の斜面および右側の斜面と水平面のなす角度は，それぞれ$\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{3}$である。点Oは区間PQの中点であり，OPとOQの長さをLとする。物体Aおよび物体Bと左側の斜面とのあいだの静止摩擦係数をμ，動摩擦係数をμ'とする。これらは$\mu > \mu'$を満たす。一方，右側の斜面は水平面と同じく，なめらかである。物体Aと物体Bの衝突時の反発係数を$\frac{1}{\sqrt{2}}$とする。物体A，物体Bは，斜面と水平面のつなぎ目をなめらかに運動する。物体A，物体Bにはたらく空気抵抗は無視できる。重力は鉛直下向きに作用し，重力加速度の大きさをgとする。すべての運動は，図1に示す鉛直平面内で起こるものとする。以下の設問に答えよ。

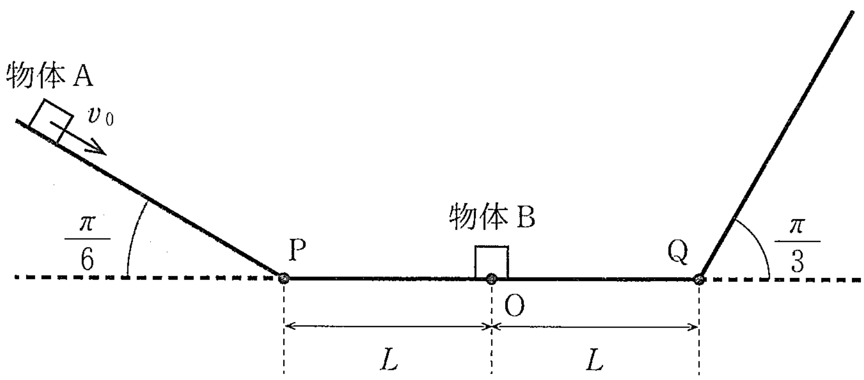

図1

設問(1)：物体Aを初速v_0で左側の斜面を下向きに滑らせたところ，物体Aは点Pに到達するまで常に等速直線運動をした。動摩擦係数μ'を求めよ。

設問(2)：斜面を滑り落ちた後，物体Aは点O上に静止した物体Bと1回目の衝突をした。衝突後の物体Aと物体Bの速さをそれぞれv_1，w_1として，それらをv_0を用いて表せ。

物体Aと物体Bが衝突した時刻を$t = 0$とする。衝突後，物体Bは水平面上を速さw_1で等速直線運動をし，時刻t_1において点Qを通過した。

設問(3)：物体Bは点Qを通過後，右側の斜面をのぼり始めた。そして最高点に到達後，物体Bは斜面を滑り落ち始め，時刻t_2において再び点Qを通過した。$t_2 - t_1$を，g，w_1を用いて表せ。

設問(4)：1回目の衝突後，物体Aは点Qに到達する前に，再び点Qを通過した物体Bと，水平面上で時刻t_3において2回目の衝突をした。t_3を，L，g，v_0を用いて表せ。また，このような衝突が実際に起こるためにLが満たすべき条件式を，g，v_0を用いて表せ。

設問(5)：2回目の衝突後の物体Aと物体Bの速さをそれぞれv_2，w_2とする。それらをv_0を用いて表せ。

設問(6)：2回目の衝突後，物体Aは左側の斜面をのぼり，ある高さまで到達してから静止した。なぜ静止したのか，物体Aに働く最大摩擦力と，重力の斜面方向の分力に注意して，数式と文章を交えて説明せよ。

物理　問題Ⅱ

図1に示すように，半径aの3枚の薄い導体円板C_0，C_1，C_2が，xy平面に平行に距離dの間隔をおいて並んでいる。円板C_0，C_1，C_2の中心をそれぞれ原点O，点$P_1(0, 0, d)$，$P_2(0, 0, -d)$とする。3つの円板は細い心棒で接続されており，円板C_1，C_2はそれぞれ点P_1，P_2を中心に回転できるとする。円板C_0と心棒は固定されている。各々の円板は図1のように，円板の外周の点から，スイッチS_0，S_1，S_2と抵抗R（抵抗値R），導線を介して接地することができる（接地点の電位を0とする）。ただし，円板C_1，C_2が自由に回転できるようにブラシによって電気接触をとる。これらは全て真空中に置かれており，真空の誘電率をε_0とする。導体円板，導線およびブラシの電気抵抗は無視できるとして，以下の設問に答えよ。

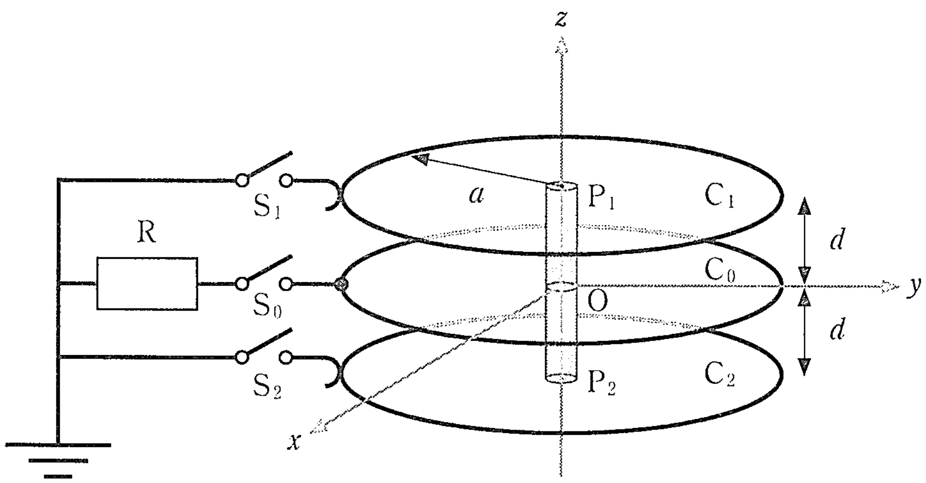

図1

設問(1)から(3)において，心棒は不導体として扱う。なお，心棒の断面積は，円板の面積に比べて十分に小さく，無視できるとする。

設問(1)：円板C_0は帯電していないとし，スイッチS_0，S_1は切ったまま，S_2を入れる。円板C_1を電気量Qの正電荷で帯電させたとき，円板C_1の電位を求めよ。円板間ではz軸に沿って一様な電場が生じ，円板間以外での電場は無視できるとする。

設問(2)：続いて，スイッチ S_1 も入れたのち，円板 C_0 を電気量 Q の正電荷で帯電させた。このとき，円板 C_0 の電位を求めよ。

設問(3)：さらに，スイッチ S_0 も入れると，抵抗 R にしばらく電流が流れた。このとき，抵抗 R で発生した熱エネルギーの総量を求めよ。

次に，図 2 に示すように，z 軸の正方向に一様な磁場(磁束密度 B)をかける。スイッチ S_1 と S_2 は入れたまま，S_0 を切って，円板 C_1 と C_2 を z 軸周りに図の方向へ(z 軸の正側から見て反時計回り)，一定の角速度 Ω で回転させた。以降の設問では，心棒は導体として扱い，OP_1 間と OP_2 間の抵抗値はともに R_0 とする。円板と心棒の間，およびブラシの接点における摩擦は無視できるとする。また，円板の回転によって生じる磁場は無視できるとする。

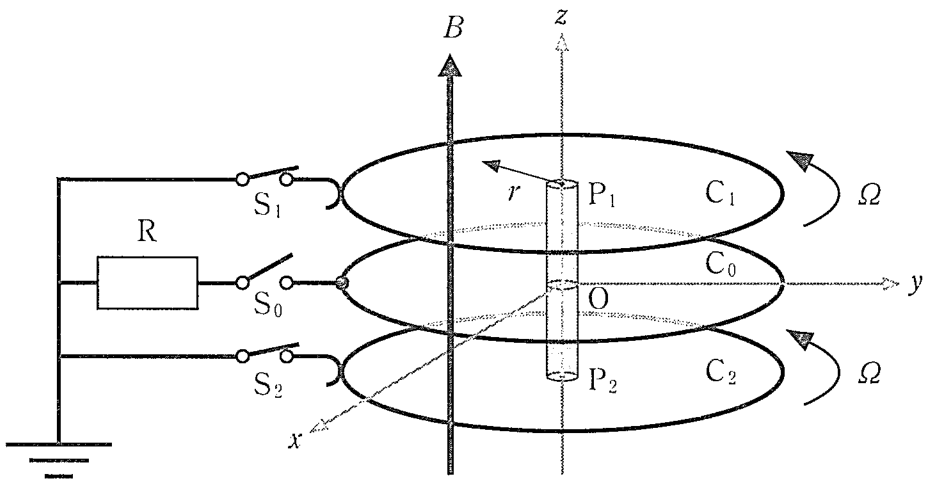

図 2

設問(4)：円板 C_1，C_2 内に存在する自由電子は円板とともに回り，磁場によってローレンツ力を受ける。電子は円板の半径に沿って，(ア)中心($r = 0$)に向かう方向，(イ)外周($r = a$)に向かう方向，のどちらに移動するか。(ア)または(イ)で答えよ。

設問(5)：自由電子が移動した結果，円板 C_1，C_2 の面に沿って電場が生じる。それぞれ中心 P_1，P_2 から距離 r における円板内の電場の大きさ $E(r)$ を求めよ。ただし，電子が受ける遠心力の影響は無視できるとする。

設問(6)：円板には電場が生じるので，電位差が存在する。そこで，横軸に中心からの距離 r，縦軸に単位電荷（1 C）が電場から受ける力を描いたグラフを考える。単位電荷が円板の外周（$r = a$）から中心（$r = 0$）まで移動するときに，力が単位電荷に対して行う仕事から，点 P_1 の電位 V を求めよ。

次に，スイッチ S_0 を入れると円板に電流が流れ，一定の角速度で回転していた円板は減速を始めた。

設問(7)：スイッチ S_0 を入れた瞬間に抵抗 R に流れる電流の大きさ I を，R，R_0，V を用いて表せ。

設問(8)：ある時刻 t での円板の角速度を ω とする。微小時間が経過した $t + \Delta t$ のとき，角速度は $\omega + \Delta\omega$ へ変化したとする。円板1枚あたりの質量を M として，角速度の時間変化 $\dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$ を，ω，a，B，M，R，R_0 を用いて表せ。なお，円板の質量は外周部（$r = a$）に集中していると仮定し，その運動エネルギーは $\dfrac{Ma^2\omega^2}{2}$ と表せることを利用せよ。また，$(\Delta\omega)^2$ や $\Delta\omega\Delta t$ などの微小量どうしの積は無視すること。

物理　問題Ⅲ

球面凸レンズの原理を調べよう。まず，図 1 のように，点 A にレーザー光源を置き，透明な物質でできた半径 R の球体にレーザー光を当てる。物質の屈折率は $n (n > 2)$ であり，光の波長によらず一定とする。球体の外部は真空である(屈折率 1)。レーザー光は十分に細く，広がらずに進む。球体の中心を点 O とし，直線 AO が球表面と交わる点を B とする。レーザー光は，球面上の点 C で屈折し，直線 AO と球体内の点 D で交差した。AB の長さを d_1，BD の長さを d_2，点 C の直線 AO からの距離を h とする。直線 AC と直線 OC のなす鋭角を θ_1，$\angle \mathrm{OCD} = \theta_2$，$\angle \mathrm{CAB} = \alpha$，$\angle \mathrm{COB} = \beta$，$\angle \mathrm{CDB} = \gamma$ とする。各角度はラジアンで表されている。以下では，h は R に比べて十分に小さいとする。このとき θ_1，θ_2，α，β，γ に対して，微小角度 x に対する近似式 $\sin x \fallingdotseq x$，$\cos x \fallingdotseq 1$ が成り立つものとする。以下の設問に答えよ。

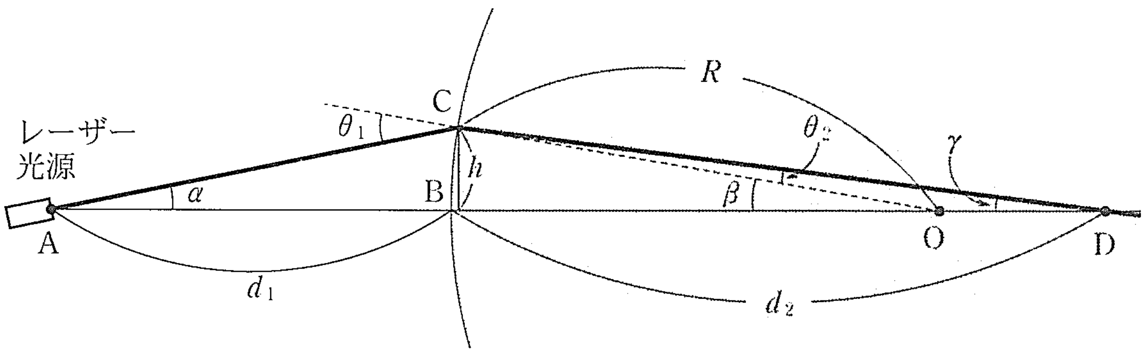

図 1

設問(1)：θ_1 と θ_2 の間に成立する関係を，屈折率 n を用いて表せ。

設問(2)：以下の文章中の $\boxed{\text{(ア)}}$ ～ $\boxed{\text{(カ)}}$ ， $\boxed{\text{(ケ)}}$ に入る数式を答えよ。 $\boxed{\text{(キ)}}$ ， $\boxed{\text{(ク)}}$ では，適切な語句を選べ。

図1において θ_1，θ_2 を α，β，γ を使って表すと，$\theta_1 =$ $\boxed{\text{(ア)}}$ ，$\theta_2 =$ $\boxed{\text{(イ)}}$ である。設問(1)で求めた関係を用いると，屈折率 n は α，β，γ を使って，$n =$ $\boxed{\text{(ウ)}}$ と表すことができる。ACの長さを s_1，CDの長さを s_2 とし，α，β，γ を s_1，s_2，R，h を使って表すと，$\alpha =$ $\boxed{\text{(エ)}}$ ，$\beta =$ $\boxed{\text{(オ)}}$ ，$\gamma =$ $\boxed{\text{(カ)}}$ である。これらを $n =$ $\boxed{\text{(ウ)}}$ に代入すると，$s_2 = \dfrac{nR}{(n-1)-\dfrac{R}{s_1}}$ が得られる。微小角度に対する近似式を用いると，$d_1 \fallingdotseq s_1$，$d_2 \fallingdotseq s_2$ であり，$d_2 = \dfrac{nR}{(n-1)-\dfrac{R}{d_1}}$ となる。距離 d_1 を一定に保ちつつレーザー光源の方向を変えて h を大きくすると，d_2 は $\boxed{\text{(キ)大きくなる，小さくなる，変化しない}}$ 。h を変えずに距離 d_1 を大きくすると，d_2 は $\boxed{\text{(ク)大きくなる，小さくなる，変化しない}}$ 。

一方，レーザー光源を球体に近づけて $d_1 < \dfrac{R}{n-1}$ とすると，レーザー光は図1のようには進まず，図2のようにA→C→Eと進む。直線CEは直線AOと球体の外の点Dで交差する。このとき，屈折率 n を図2の α，β，γ を使って表すと $n =$ $\boxed{\text{(ケ)}}$ であり，BDの長さは $d_2 = -\dfrac{nR}{(n-1)-\dfrac{R}{d_1}}$ となる。

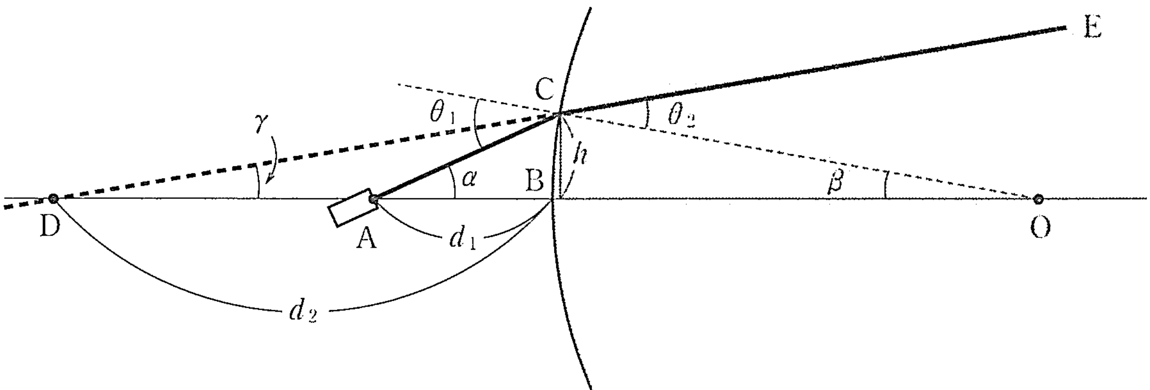

図2

次に図3のように，球体と同じ物質の凸レンズを用意する。レンズの光軸は直線BCであり，光軸上の点Aにレーザー光源を置く。点B，点Cを含むレンズの表面はそれぞれ点O_2，点O_1を中心とする半径Rの球面である。レーザー光は，レンズ表面上の点E，点Fを通り，光軸と点Dで交差した。ABの長さをl_1，CDの長さをl_2とする。レンズの厚みBCは十分に薄く，l_1やl_2に対して無視することができる。∠EABと∠FDCは微小角であるとする。

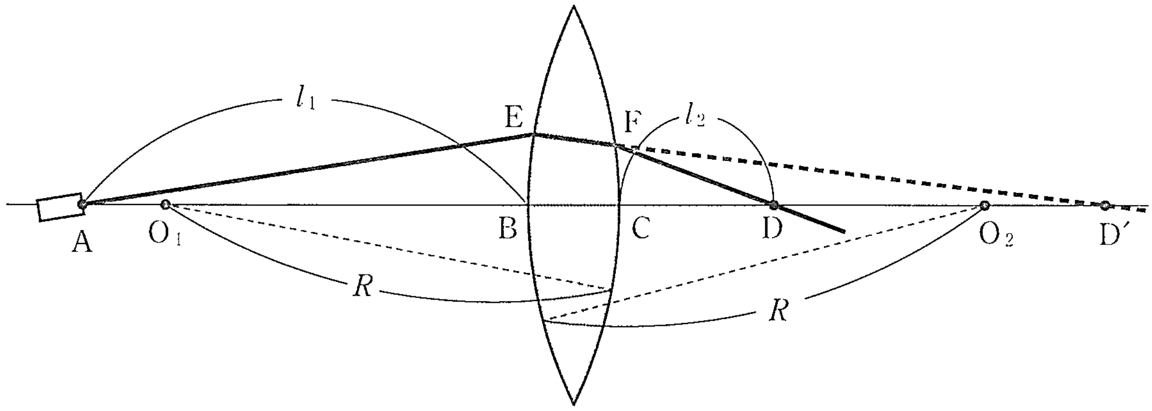

図3

設問(3)：点Fでの屈折を考えなければ，レーザー光は光軸と点D′で交差する。l_1とBD′の長さには，設問(2)で導出した関係式が成立する。続いて点Fでの屈折を考えると，レーザー光はE→F→Dと進む。一方，点Dにレーザー光源を置き，点Fにレーザー光を照射すると，レーザー光はD→F→Eと進む。これは図2の状況に対応し，l_2とCD′の長さには，設問(2)で導出した関係式が成立する。$\dfrac{1}{l_1}+\dfrac{1}{l_2}$を$n$，$R$を用いて表せ。

図3の凸レンズの屈折率を$n = 2.6$とし，$R = 70\ \mathrm{cm}$とする。

設問(4)：レンズの焦点距離fを，有効数字2桁で求めよ。

設問(5)：レーザー光源を取り除き，レンズより十分に小さい物体を点Aに置く。物体に照明をあてて，レンズをはさんで物体の反対側に置いたスクリーンにはっきりとした像を映す。像の拡大率を10倍にするための距離 l_1 を有効数字2桁で求めよ。