物　理　問　題

（解答はすべて物理解答用紙に記入すること）

〔1〕 図1のように，水平方向を x 軸，鉛直上向きを y 軸の正の方向とし，$y = ax^2$ で表される放物線状の床上に小球が置かれている。ただし，a は正の定数とする。小球は x-y 面内を運動し，床上を摩擦なく動く。運動は $|x|$ が小さい領域に限られ，そのため床面に沿った原点Oから点 (x, ax^2) までの距離は $|x|$ に等しいと近似できる。小球の大きさは無視できるものとする。重力加速度の大きさを g とする。以下の問に答えよ。

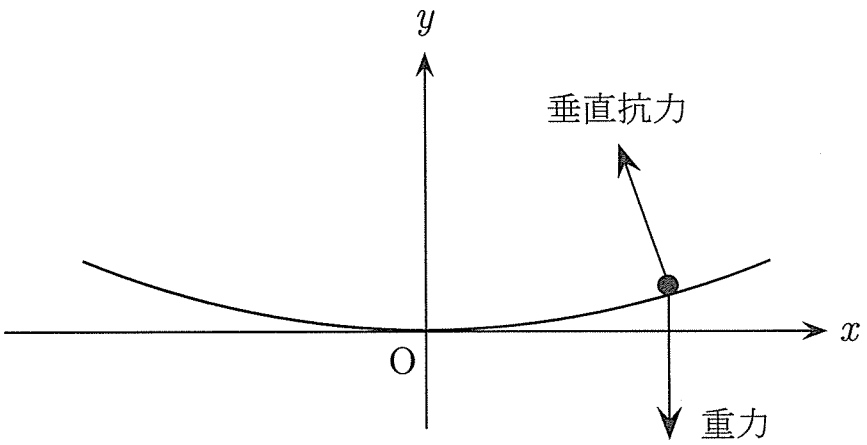

図1

I. 質量 m の小球を床上に置き，静かに手をはなしたところ，動きはじめた。この運動を考えよう。

問 1 座標 (x, ax^2) の位置で小球が受ける床の接線方向の力は，x が増える方向を正として $F = -mbx$ と近似できる。ここで，b は正の定数である。この b を a と g を用いて表せ。なお，接線方向と水平方向のなす角 θ は十分小さく，$\cos\theta \fallingdotseq 1$，$\tan\theta \fallingdotseq \theta$，$\sin\theta \fallingdotseq \theta$ としてよい。

問 2 小球は単振動する。その周期を，b および必要なものを用いて表せ。

II. 質量 m_1 と m_2 の 2 つの小球（以下それぞれを小球 1，小球 2 と呼ぶ）を用意し，$x = x_0$ の位置で小球 1 を，$x = cx_0$ の位置で小球 2 を静かに同時にはなした。ここで，$m_1 \neq m_2$ とし，c は 1 を除く定数である。その後，2 つの小球が弾性衝突した。この運動を以下の問で順次考えていこう。床の接線方向の小球の速度は，x が増える方向を正とする。

問 3 2 つの小球が最初に衝突する位置の x 座標を求めよ。

問 4 最初の衝突の直前の，2 つの小球それぞれの速度を，c，x_0，b（または b のかわりに a と g）のうち必要なものを用いて表せ。

最初の衝突の直後，小球 2 が静止した。このとき，小球 1 の衝突直前の速度を v，衝突直後の速度を W とする。

問 5 衝突前後の運動量の保存則および運動エネルギーの保存則を，c，m_1，m_2，v，W のうち必要なものを用いて表せ。

問 6 質量 m_2 と m_1 の比を $r = \dfrac{m_2}{m_1}$ として，c を r を用いて表せ。次に，r をさまざまな値に変化させたとき，c の値がとる範囲を全て示せ。ただし，r は 1 を除く正の値をとることに注意せよ。

問 7 $c = -1$ のとき，W を v を用いて表せ。

問 8 $c = -1$ で最初の衝突をした後，小球 1 は静止していた小球 2 と再び衝突した（2 回目の衝突）。2 回目の衝突から 3 回目の衝突の間に，2 つの小球それぞれについて，$|x|$ が最大となるときの x の値を，x_0 および必要なものを用いて表せ。

III. 2 つの小球が非弾性衝突をするときの運動を考えよう。反発（はねかえり）係数を e とする。小球 1 と小球 2 の質量を同じ m $(m_1 = m_2 = m)$ とし，それぞれ $x = x_0$ と $x = -x_0$ の位置で，それぞれの時刻において，静かにはなして衝突させる。最初に衝突する位置の x 座標を x_s とし，その値の取り得る範囲を $-x_0 < x_s < x_0$ とする。ただし，ここでは $x_0 > 0$ とする。

問 9 最初の衝突の直後の，2つの小球の力学的エネルギーを，e，m，x_0，x_s，b（またはbのかわりにaとg）のうち必要なものを用いて表せ。ただし，力学的エネルギーは2つの小球が原点で静止している状態を0とする。また，この力学的エネルギーが最小になるx_sを求めよ。

問 10 2つの小球を，$x_s = 0$となるようにはなした。その後，4回衝突するまでに小球1が移動した全道のり（総移動距離）を，x_0とeおよび必要なものを用いて表せ。ただし，移動距離はx座標の変化としてよいことに注意せよ。

〔**2**〕 図1に示すラジオ（ゲルマニウムラジオ）を製作することを考えよう。このラジオは電波を受信するアンテナ，コイル，電気容量を変えることができるコンデンサー，ダイオード（ゲルマニウムダイオード），電圧の変動を音に変換するイヤホン（クリスタルイヤホン）などから構成されている。以下の問に答えよ。ただし，問5および問8の｛　｝では，(a) または (b) の正しい方を解答欄に記入せよ。

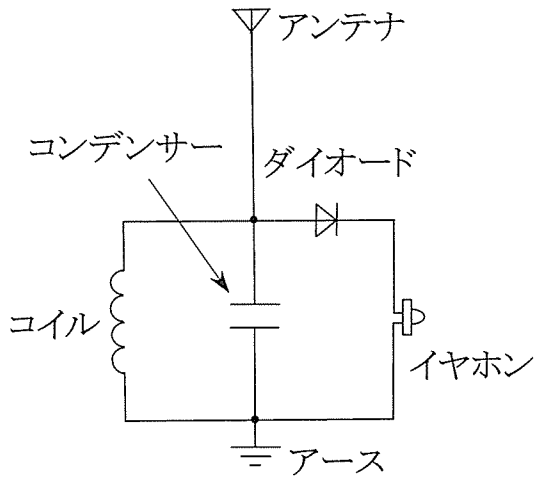

図1

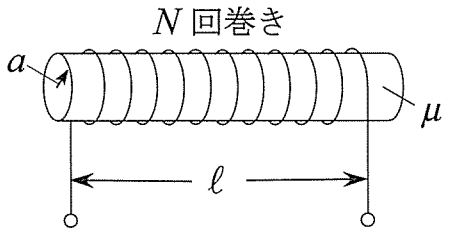

図2

まず，図2に示すコイルを自作しよう。半径 a〔m〕，透磁率 μ〔N/A^2〕の十分に長い円柱状の物質に，導線を一様に N 回巻いてコイルを製作する。導線が巻いてある部分の長さは ℓ〔m〕とする。ただし，導線の太さおよびその抵抗は無視する。

問 1 このコイルの自己インダクタンス L〔H〕を，μ，N，ℓ，a を用いて表せ。

次に，コンデンサーを自作しよう。断面図を図3に示すように，一辺 b〔m〕の正方形の極板 M 枚を，間隔 $2d$〔m〕で平行に並べて接続した櫛(くし)形の電極を，2つ用意する。それらをお互いの極板間の距離が d で等間隔とな

るように，紙面の左右方向から差し込んで，重なる部分が x〔m〕となるようなコンデンサーを製作する。紙面奥行き方向には極板のずれはないものとする。この x を変えることによって，電気容量を変えることができる。全ての極板間は誘電率 ε〔F/m〕の空気で満たされている。d は b および x に比べて十分小さい。極板の厚さおよびその抵抗は無視する。

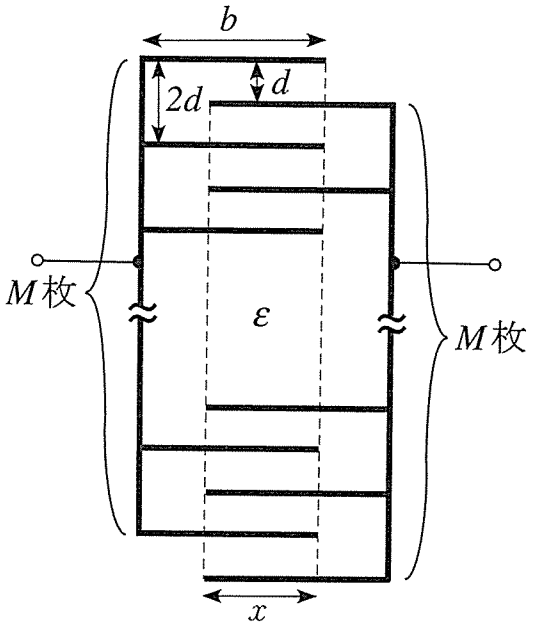

図3

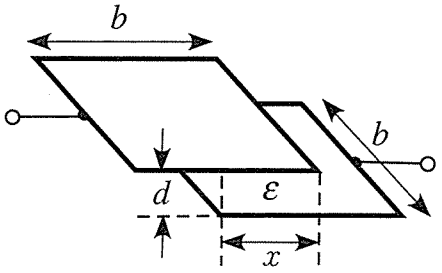

図4

問 2 図3に示すコンデンサーのうち，図4のように，2枚の極板が d だけ隔てて重なっている部分を取り出したコンデンサーについて考える。上下の極板が重なっている部分の幅は x である。このコンデンサーの電気容量 C_1〔F〕を，ε，b，x，d を用いて表せ。

問 3 図3に示すコンデンサー全体の電気容量 C〔F〕を，C_1 と M を用いて表せ。

聴きたい放送局の周波数の電波のみを選択的に受信できる仕組みについて考える。簡単のために，図１の回路で電波を受信している状態を図５の回路に置き換える。ここで，図１のダイオードとイヤホンをあわせた部分を抵抗値 R〔Ω〕の抵抗で置き換えた。また，ある放送局からアンテナに届く角周波数 ω_1〔rad/s〕の電波によってラジオに電力が供給される。これを，適切な抵抗値 r〔Ω〕の抵抗が直列接続された交流電源で置き換えた。このとき，交流電源の交流電圧の最大値を V_1〔V〕，角周波数を ω_1 とする。図５のように，破線で囲まれた RLC 並列回路にかかる交流電圧の最大値を V_2〔V〕とし，流れ込む交流電流の最大値を I_2〔A〕とする。図５の回路において，C を変えると V_2 が変化する。特定の C で V_2 が最大となり，対応する図１の回路では，ω_1 で放送している局の番組がイヤホンから聞こえる。以下では，このことについて考えてみよう。

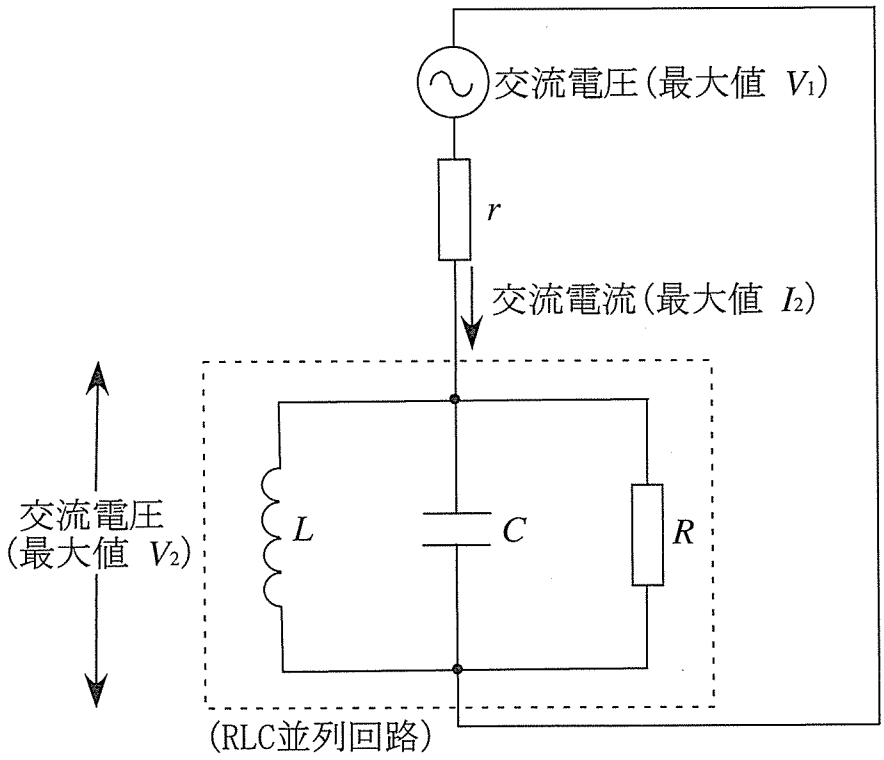

図５

一般に，RLC 並列回路のインピーダンス Z〔Ω〕は，交流の角周波数 ω〔rad/s〕を用いて，以下のように表される。

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}}$$

問 4 図5に示す RLC 並列回路の抵抗，コイル，コンデンサーそれぞれを流れる交流電流の最大値を，ω_1，L，C，R，V_2 のうち，必要なものを用いて表せ。

問 5 図5に示す RLC 並列回路では，C を変えると Z が変化し，Z が｛(a) 最大，(b) 最小｝のとき，V_2 が最大となる。そのときの Z と I_2 の値を，ω_1，L，C，R，V_2 のうち，必要なものを用いて表せ。

問 6 ω_1 で送信している放送局の番組を聴きたい。最適な C の値を，ω_1，L，R のうち，必要なものを用いて表せ。

受信したい放送局と別の放送局の電波の周波数の差が小さい場合，2つの放送局の番組が同時に聞こえてくることがあり，これを混信という。混信を避けるためには，どのような回路がよいかを考えよう。ω_1 で $\frac{V_2}{I_2}$ が最大となるように C の値を固定する。交流電源の角周波数を ω_1 から大きくしていったところ，ω_2 で $\frac{V_2}{I_2}$ が ω_1 での値の半分になった。逆に，ω_1 から小さくしていったところ，ω_3 で $\frac{V_2}{I_2}$ が ω_1 での値の半分になった。ω_2 と ω_3 との差を $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_3$ とする。

問 7 $\Delta\omega$ を，L，C，R のうち，必要なものを用いて表せ。その際，ω は正の値であることに注意せよ。

ヒント：ω についての2次方程式の形にすると，解きやすくなる。

問 8 混信を避けるためには，前問で求めた $\Delta\omega$ が｛(a) 大きい方がよい，(b) 小さい方がよい｝。

〔3〕 鉛直に置かれたシリンダーの中に，上下になめらかに動けるピストンを水平に入れ，単原子分子理想気体を閉じ込める。図1のように，シリンダー外には気圧 p_0，温度 T_0 の外気があり，シリンダー内の気体が外気と熱平衡にあるとき，気体の体積は V_0 であった。気体にはヒーターによって熱を与えることができるが，シリンダー内の気体は常に一様とみなせるものとする。また，シリンダーを通して熱の出入りはあるが，外気の温度と気圧は変化しないものとする。重力加速度の大きさを g とし，ピストンの厚みや質量は無視する。

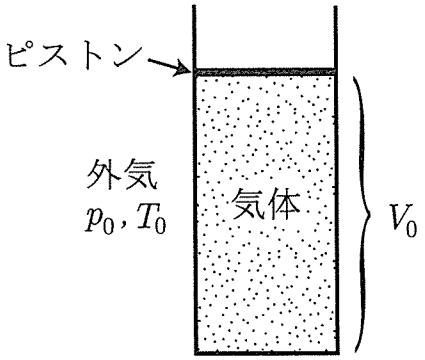

図1

I. 図2のように，ピストンの上に質量 M のおもりをのせて全体が熱平衡に達すると，シリンダー内の気体の圧力と体積がそれぞれ p_1，V_1 となった。シリンダーの断面積を S とする。

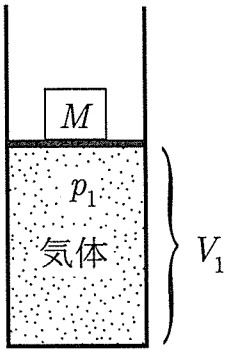

図2

問 1 p_1 と V_1 をそれぞれ p_0，M，g，S，V_0 のうち必要なものを用いて表せ。

問 2 次に，おもりをのせたまま，シリンダー内の気体をヒーターで加熱すると，気体はゆっくりと膨張した。気体の体積が V_0 になると同時に加熱をやめた。このときの気体の温度を，p_1 や V_1 を用いず，p_0，M，g，S，T_0 のうち必要なものを用いて表せ。

問 3 加熱をやめてからすぐに，シリンダー内の気体の体積が V_0 に保たれるようにピストンを固定する。時間が経過すると，気体の温度は単調に下がり，やがて外気と同じ温度 T_0 になった。加熱をやめてから熱平衡になるまでの間に気体から外に放出された熱量を，M，g，S，V_0 のうち必要なものを用いて表せ。

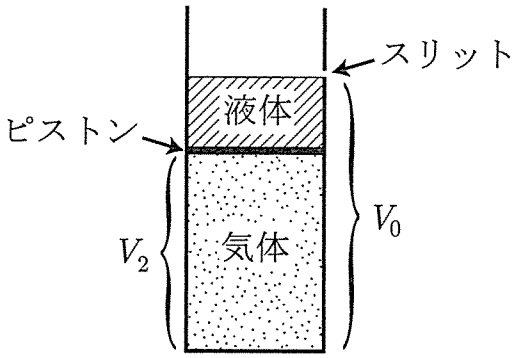

図 3

II. 図 1 の状態からピストンを押し下げ，図 3 のように，ピストンの上に液体を入れた状態で，シリンダー内の気体と外気が熱平衡に達した。このとき気体の体積は V_2 であり，気体と液体の体積の合計は V_0 であった。シリンダー側面には，液面直上の高さの位置に細いスリットが開けてある。以下では，これを最初の状態とする。

ヒーターで気体を加熱したところ，気体はゆっくりと膨張して，やがて体積が V_0 となり，そのとき気体の温度は T_0 に戻った。この膨張過程において，ピストンの上昇に伴って液体はスリットからこぼれ出し，気体の体積が V_0 となったときにピストン上の液体は完全になくなる。このとき，気体はスリットからもれ出さないものとする。ピストンの上昇中，液面は常に水平に保た

れ，その位置は一定の高さ（スリットの位置）にある。また，液体の密度は常に一定であるとし，こぼれた液体は他に影響をおよぼさない。以下の問では，この膨張過程について考える。

問 4 シリンダー内の気体の体積が V （$V_2 \leqq V \leqq V_0$）のとき，気体の圧力を p_0，V_0，V_2，V のうち必要なものを用いて表せ。

問 5 シリンダー内の気体の体積が V（$V_2 \leqq V \leqq V_0$）のとき，気体の温度を T_0，V_0，V_2，V のうち必要なものを用いて表せ。

問 6 シリンダー内の気体の温度が最も高くなるとき，気体の体積と温度をそれぞれ T_0，V_0，V_2 のうち必要なものを用いて表せ。

問 7 図3に示した最初の状態からシリンダー内の気体の体積が V_0 になるまでの間に気体が吸収した正味の熱量（気体がヒーターから吸収した熱量から外に放出した熱量を引いたもの）を，p_0，V_0，V_2 のうち必要なものを用いて表せ。