物　　理

1　次の問題の［　　］の中に入れるべき最も適当なものをそれぞれの**解答群**の中から選び，その番号を**解答用マークシート**の指定された欄にマークしなさい。(同じ番号を何回用いてもよい。)　(40 点)

水平な床の端に段差 (高さ) が h [m] で奥行 (幅) が w [m] の階段が無限に続いている。高さ ℓ [m] の天井の一点 P から長さ ℓ [m] のひもが垂れ下がっており，その先には質量 M [kg] の小球 B が取り付けられている。P の鉛直真下の床の上には質量 m [kg] $(m < M)$ の小球 A が置かれている。ひもと鉛直線のなす角度が θ [rad] になるように小球 B を少しだけ引き上げた。状況を**図 1** に示している。

θ は微小で，ひもは伸び縮みせず，たるむこともないとする。また，ひもの質量，小球の大きさ，および小球と床との摩擦は無視できるものとする。小球どうし，および小球と床のはねかえり係数（反発係数）を $e(0 < e < 1)$ とし，重力加速度の大きさを g [m/s^2] とする。水平方向を x 軸とし右向きを正方向にとり，鉛直方向を y 軸とし上向きを正方向にとる。階段が始まる点を座標原点 O とし，小球は xy 平面のみで運動するものとする。必要であれば $|x| \ll 1$ のときの近似式 $\cos x \fallingdotseq 1 - \dfrac{1}{2}x^2$ を用いてもよい。

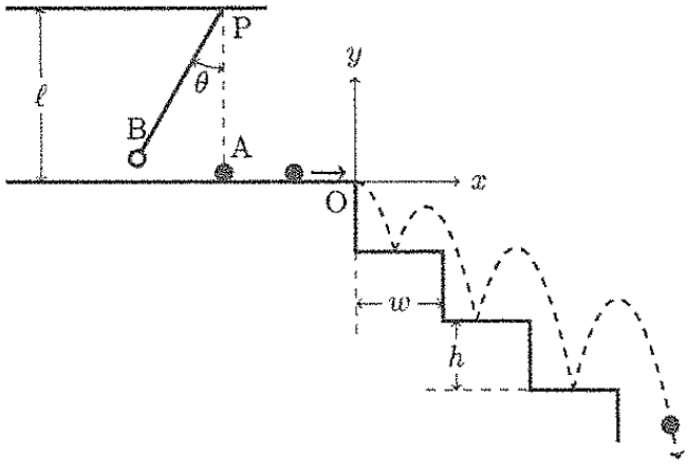

図 1

(1) 小球Bは，引き上げていた手を離してから $\boxed{\text{(ア)}}$ [s] 後に床の上の小球Aと衝突する。衝突直前の小球Bの速さは $v_B = \boxed{\text{(イ)}}$ [m/s] である。小球Aと衝突した直後の小球Bの速さは，$\boxed{\text{(ウ)}} \times v_B$ [m/s] となる。小球Bと衝突した小球Aは速さ $v = \boxed{\text{(エ)}} \times v_B$ [m/s] で動き始め，床の端で階段から落ちていく。

小球が階段を飛び跳ねながら落ちる光景は，お寺の境内などで見かけることがある。小球がどのように落下していくか考察してみよう。小球Aが階段を落ちていく際に，それぞれのステップ（段）での衝突後の運動には次の3つの場合が考えられる。

(a) 同じステップに衝突する。

(b) 次のステップに衝突する。

(c) 次のステップを飛び越えてそれ以降のステップに衝突する。

以下の設問では，小球Aが床の端から落ちて最初に衝突するのが一段目のステップの場合についてのみ考える。

(ア) の解答群

⓪ $\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$　① $2\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$　② $\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$　③ $\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$

④ $2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$　⑤ $\sqrt{\dfrac{g}{\ell}}$　⑥ $2\sqrt{\dfrac{g}{\ell}}$　⑦ $\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{g}{\ell}}$

⑧ $\pi\sqrt{\dfrac{g}{\ell}}$　⑨ $2\pi\sqrt{\dfrac{g}{\ell}}$

(イ) の解答群

⓪ $\sqrt{g\ell}\theta$　① $\sqrt{g\ell}\theta^2$　② $g\ell\theta$　③ $g\ell\theta^2$

(ウ) の解答群

⓪ $\dfrac{M}{M+m}$　① $\dfrac{eM}{M+m}$　② $\dfrac{m}{M+m}$　③ $\dfrac{em}{M+m}$

④ $\dfrac{M-m}{M+m}$　⑤ $\dfrac{M-em}{M+m}$　⑥ $\dfrac{M+em}{M+m}$　⑦ $\dfrac{eM-m}{M+m}$

⑧ $\dfrac{eM+m}{M+m}$

(エ) の解答群

⓪ $\dfrac{M}{M+m}$　① $\dfrac{eM}{M+m}$　② $\dfrac{m}{M+m}$　③ $\dfrac{em}{M+m}$

④ $\dfrac{(1-e)M}{M+m}$　⑤ $\dfrac{(1+e)M}{M+m}$　⑥ $\dfrac{(1-e)m}{M+m}$　⑦ $\dfrac{(1+e)m}{M+m}$

⑧ $\dfrac{M-em}{M+m}$　⑨ $\dfrac{eM-m}{M+m}$

左のページは白紙です。

(2) 小球Aが原点Oを通過する時刻を時間原点 $t = 0$ s とする。最初に衝突するまでの時間 T [s] は $T =$ [(オ)] なので，その衝突点の x 座標は [(オ)] $\times$ v [m] である。ここで，v は**小問** (1) で求めた小球Aの速さである。このとき，衝突直前の速度の y 成分 v_{y0} [m/s] は $v_{y0} =$ [(カ)] である。

はね返った小球Aは放物線を描いて運動する。小球Aがこの放物線の頂点に達する時刻は [(キ)] $\times T$ [s] であり，一段目のステップと同じ高さになる時刻は [(ク)] $\times T$ [s] である。一段目のステップに再衝突せずに，二段目のステップと同じ高さになる時刻は [(ケ)] $\times T$ [s] である。以上のことから，小球Aが一段目のステップに再衝突せずに二段目のステップに衝突するための条件は [(コ)] $\times$ [(ケ)] $\times vT \leqq w <$ [(ク)] $\times vT$ [m] であることがわかる。また，二回目の衝突直前の小球Aの速度の y 成分は，[(サ)] $\times v_{y0}$ [m/s] である。

二段目のステップで衝突した後の運動も放物線を描く。一段目の衝突後の運動と同じように考えると，二段目に再衝突せずに三段目のステップに衝突する場合の，衝突直前の速度の y 成分は [(シ)] $\times v_{y0}$ [m/s] であることがわかる。

(オ) の解答群

⓪ $\sqrt{\dfrac{4h}{g}}$　① $\sqrt{\dfrac{3h}{g}}$　② $\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$　③ $\sqrt{\dfrac{h}{g}}$

④ $\sqrt{\dfrac{h}{2g}}$　⑤ $\sqrt{\dfrac{h}{3g}}$　⑥ $\sqrt{\dfrac{h}{4g}}$

(カ) の解答群

⓪ $-\sqrt{\dfrac{gh}{2}}$　① $-\sqrt{gh}$　② $-\sqrt{2gh}$　③ $-\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$

④ $-\sqrt{\dfrac{h}{g}}$　⑤ $-\sqrt{\dfrac{h}{2g}}$　⑥ $-\sqrt{\dfrac{2g}{h}}$　⑦ $-\sqrt{\dfrac{g}{h}}$

⑧ $-\sqrt{\dfrac{g}{2h}}$

(キ), (ク), (ケ) の解答群

⓪ $(1-e)$　① $(1+e)$

② $(1+2e)$　③ $(1+\sqrt{1+e^2})$

④ $(1+\sqrt{1-e^2})$　⑤ $(1+e+\sqrt{1+e^2})$

⑥ $(1+2e+\sqrt{1+e^2})$　⑦ $(1+\sqrt{1+e^2+e^4})$

⑧ $(1+e+\sqrt{1+e^2+e^4})$　⑨ $(1+2e+\sqrt{1+e^2+e^4})$

(コ) の解答群

⓪ $\frac{1}{4}$　① $\frac{1}{3}$　② $\frac{1}{2}$

③ 1　④ 2　⑤ 3

⑥ 4

(サ), (シ) の解答群

⓪ $\sqrt{1-e}$　① 1　② $\sqrt{1+e}$

③ $\sqrt{1+2e}$　④ $\sqrt{1+e+e^2}$　⑤ $\sqrt{1+2e+2e^2}$

⑥ $\sqrt{1+e^2}$　⑦ $\sqrt{1+2e^2}$　⑧ $\sqrt{1+e^2+e^4}$

⑨ $\sqrt{1+2e^2+2e^4}$

左のページは白紙です。

(3) **小問** (2) でわかるように, 衝突を繰り返すたびに, 衝突直前の小球 A の速度の y 成分は $\boxed{\text{(ス)}}$ なっていく。

階段の一段目のステップの段差を調整するだけで, 各ステップでの衝突直前の小球 A の速度の y 成分が常に同じになるようにできるか考えてみよう。一段目のステップでの衝突と二段目のステップでの衝突のそれぞれの衝突直前の速度の y 成分が同じになれば, その後の衝突でも衝突直前の速度の y 成分は同じになるはずである。

小問 (2) の解法を適用することで, 上記の 2 つの y 成分を求めることができる。その 2 つが等しいという式から, 最初の段差を h から $h' = \boxed{\text{(セ)}} \times h\,[\mathrm{m}]$ へ変更すればよいことがわかる。ステップの奥行 w が, 2 つの衝突間の時間差に小球 A の速度の x 成分を掛けたものと等しければ, 小球は各ステップに 1 回だけ衝突しながら落下する。その条件は, 最初の段差を h' と変更したときの, 一段目のステップでの衝突点の x 座標 $x_0\,[\mathrm{m}]$ を用いて, $w = \boxed{\text{(ソ)}} \times x_0$ と表すことができる。振り子の角度 θ を調整して, 最初の衝突点が上記の条件を満たすようにすれば, 小球はこの階段を場合分け (b) で落下し続ける。

(ス) の解答群

⓪ 小さく　　① 大きく

(セ), (ソ) の解答群

⓪ 1　　① $(1+e)$　　② $(1+e^2)$　　③ $\dfrac{1}{1-e}$

④ $\dfrac{1+e}{1-e}$　　⑤ $\dfrac{1}{1+e}$　　⑥ $\dfrac{1-e}{1+e}$　　⑦ $\dfrac{1}{1-e^2}$

⑧ $\dfrac{1+e^2}{1-e^2}$　　⑨ $\dfrac{1}{1+e^2}$