物理（マーク解答問題）

〔Ⅰ〕 以下の空欄にあてはまるものをそれぞれの解答群の中から一つだけ選び，マーク解答用紙の該当欄にマークせよ。

図1のように，xy-平面で原点Oを通りy軸に関して対称な曲線Cをy軸を中心に回転してできる形状の凹面鏡を考える。この回転の中心軸であるy軸を，この凹面鏡の主軸とよぶことにする。この凹面鏡に向かって主軸に平行に入射する光線が凹面鏡で反射し，焦点F（0，f）に集まるとしよう。このとき，点A（x，f）を通ってy軸に平行に入射した光線が，凹面鏡の点Bで反射し点Fに到達したとすると，点Aから点Fまでの光線の長さはxによらず一定である。これより曲線Cは［①］で表されることがわかる。点Oから点Fまでの距離fをこの凹面鏡の焦点距離とよぶ。

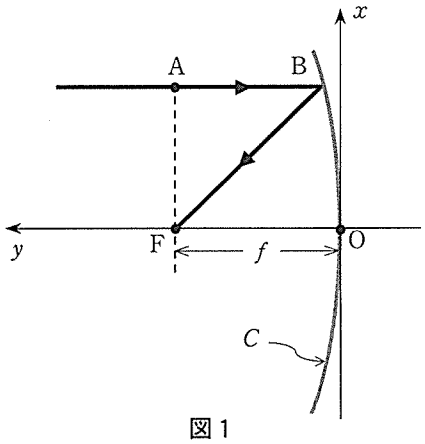


図1

①の解答群

a．$y = fx^2$　　b．$x^2 + (y-f)^2 = f^2$　　c．$y = 2fx^2$

d．$2x^2 + (y-f)^2 = f^2$　　e．$y = 4fx^2$　　f．$4x^2 + (y-f)^2 = f^2$

g．$y = \frac{1}{f}x^2$　　h．$x^2 + (y-2f)^2 = 4f^2$　　i．$y = \frac{1}{2f}x^2$

j．$\frac{1}{2}x^2 + (y-f)^2 = f^2$　　k．$y = \frac{1}{4f}x^2$　　l．$\frac{1}{4}x^2 + (y-f)^2 = f^2$

以降では，この形状の凹面鏡（厚みは無視できるとする）によってどのように像ができるかについて考えよう。

まず，**図2**のように焦点距離fの凹面鏡とその焦点との間に物体PQがある場合を考える。この場合はつぎのように虚像ができる。物体の底の点Pは凹面鏡の主軸上にあり，PQは主軸に垂直となっているものとする。また，凹面鏡と主軸との交点をOとし，OPの長さをaとする。点Qから主軸に平行に凹面鏡に向かう光線は点Aで反射し焦点Fに至る。一方，点Qから出て線分FQを延長する方向に凹面鏡に入射する光線は点Bで反射し，反射光線は主軸に平行になる。この反射光線を逆向きに延長した直線と光線AFを逆向きに延長した直線との交点Q′が虚像の頂点であり，点Q′を通り主軸に垂直な直線と主軸との交点P′が虚像の底の点である。物体は凹面鏡に対して十分小さく，点Aと点Bは，点Oを通り主軸に垂直な直線上にあると近似してよいことにする（**図2**では説明のため物体PQを大きく描いている）。このとき，P′Q′の長さはPQの長さの［②］倍になる。また，OP′の長さは［③］となる。

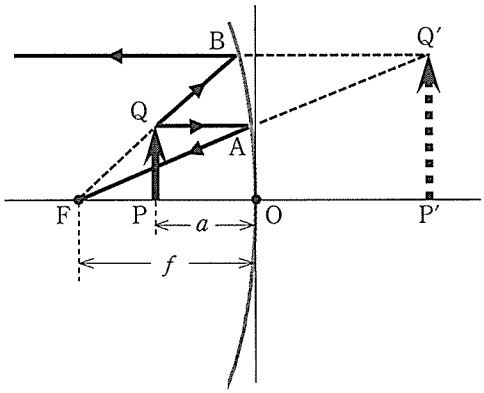


図2

②の解答群

a．$\dfrac{fa}{(f-a)^2}$　b．$\dfrac{f^2}{a^2}$　c．$\dfrac{a^2}{(f-a)^2}$　d．$\dfrac{f}{f-a}$　e．$\dfrac{f}{a}$

f．$\dfrac{f+a}{f-a}$　g．$\dfrac{f+a}{f}$　h．$\dfrac{f^2}{(f-a)^2}$　i．$\dfrac{a}{f-a}$

③の解答群

a．$\dfrac{f^2}{a}$　b．$\dfrac{(f-a)f}{a}$　c．$\dfrac{(f+a)^2}{f}$　d．$\dfrac{(f+a)f}{a}$　e．$\dfrac{(f+a)a}{f-a}$

f．$\dfrac{f^2}{f-a}$　g．$\dfrac{(f+a)f}{f-a}$　h．$\dfrac{a^2}{f-a}$　i．$\dfrac{fa}{f-a}$

つぎに，**図3**のように，焦点距離fの凹面鏡の焦点の外側に物体PQがある場合について考える。この場合は実像を結ぶ。物体の底の点Pは凹面鏡の主軸上にあり，PQは主軸に垂直となっている。OPの長さをbとする。点Qから主軸に平行に出た光線が凹面鏡の点Bで反射すると，この反射光線は焦点Fを通る。一方，点Qから出て焦点Fを通る光線は，点Aで反射し，主軸と平行な光線となる。これらの反射光線の交点Q′が実像の頂点であり，点Q′を通り主軸に垂直な直線と主軸との交点P′が実像の底の点である。ここでも，物体は凹面鏡に対して十分小さく，点Aと点Bは点Oを通り主軸に垂直な直線上にあると近似してよいことにする（**図3**では説明のため物体PQを大きく描いている）。このとき，P′Q′の長さはPQの長さの［④］倍になる。また，OP′の長さは［⑤］となる。

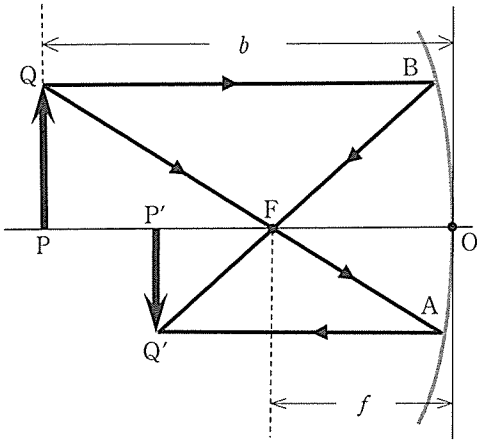


図3

④の解答群

a．$\dfrac{fb}{(b-f)^2}$　b．$\dfrac{f^2}{b^2}$　c．$\dfrac{f}{b+f}$　d．$\dfrac{f}{b}$　e．$\dfrac{f}{b-f}$

f．$\dfrac{b-f}{b+f}$　g．$\dfrac{f^2}{(b-f)^2}$　h．$\dfrac{(b-f)^2}{b^2}$　i．$\dfrac{b-f}{b}$

⑤の解答群

a．$\dfrac{f^2}{b}$　b．$\dfrac{(b-f)f}{b}$　c．$\dfrac{(b-f)^2}{f}$　d．$\dfrac{(b+f)f}{b}$　e．$\dfrac{(b+f)b}{b-f}$

f．$\dfrac{fb}{b-f}$　g．$\dfrac{(b+f)f}{b-f}$　h．$\dfrac{f^2}{b-f}$　i．$\dfrac{(b-f)b}{f}$

最後に，**図4**のように，焦点距離fの2つの凹面鏡ⅠとⅡを主軸が一致するように向かい合わせ，それぞれの焦点FとF′との距離がfになるように組み合わせた装置を考えよう。凹面鏡Ⅱから主軸に沿って距離zの位置に物体（主軸と垂直の短い矢印）があり，凹面鏡Ⅰには物体より大きめの穴があいているとする。物体から出た光がはじめに凹面鏡Ⅰで反射し，つぎに凹面鏡Ⅱで反射することによって，どこにどのような像が生じるかについて考える。ただし，物体は凹面鏡に対して十分小さく，以下ではこれまでの結果を適用できるとする。まず凹面鏡Ⅰでの反射により主軸上で点F′から距離 ⑥ の位置に虚像ができる。この虚像の高さは物体の高さ（矢印の長さ）の ⑦ 倍である。つぎに，この虚像に対して凹面鏡Ⅱでの反射により像ができる。zはfに比べて十分小さいとし，このときに成り立つ近似式$\left(1 \pm \frac{z}{f}\right)^s \fallingdotseq 1 \pm s\frac{z}{f}$を用いると，この像の主軸上の位置と点Fとの距離は ⑧ となり，この像の高さは物体の高さの ⑨ 倍となる。

この装置の応用として，**図5**のように，凹面鏡Ⅱを下にして主軸が鉛直方向を向くように置き，装置の中に人形を立たせることを考えよう。装置の中の人形は顔を北に向け，右手を顔の横に上げているとする（したがって右手は東側に位置する）。人形は装置に比べて十分に小さく，これまで用いた近似が成り立つとする（説明のため**図5**では人形を大きめに描いている）。このとき，この装置の外側の斜め上方から凹面鏡Ⅰの穴の近くを眺めると，人形の像が見える。この像は，装置の中の人形から出た光がはじめに凹面鏡Ⅰで反射し，つぎに凹面鏡Ⅱで反射することによってできたものであり，装置の中の人形に比べて ⑩ 大きさである。また，この像は凹面鏡Ⅰの穴面 ⑪ に向けており（凹面鏡Ⅰの穴面は凹面鏡Ⅱの焦点を通る水平面とする），⑫ に位置している。

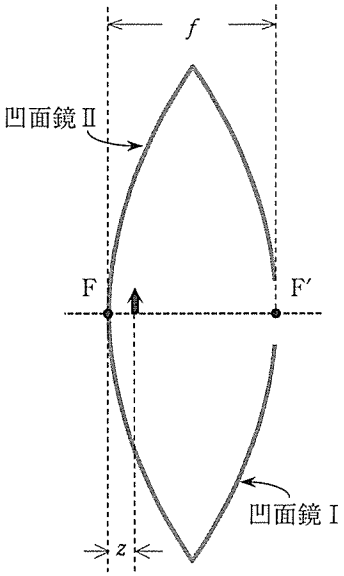


図4

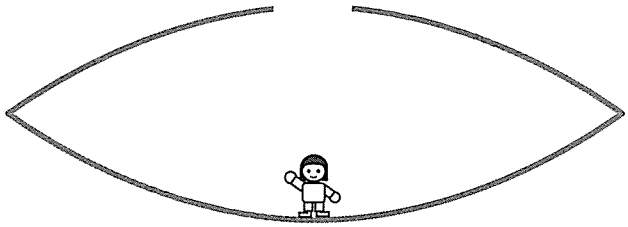


図5

⑥の解答群

a．f　　b．$f+z$　　c．$f-z$　　d．$\frac{fz}{f-z}$　　e．$\frac{fz}{f+z}$

f．$f+\frac{z}{2}$　　g．$f-\frac{z}{2}$　　h．$\frac{f^2}{z}-f$　　i．$\frac{f^2}{z}$　　j．$\frac{f^2}{z}+f$

⑦の解答群

a．f　b．$\frac{f}{z}$　c．$\frac{f^2}{z^2}$　d．$\frac{f}{f-z}$　e．$\frac{f^2}{(f-z)^2}$　f．$\frac{f}{f+z}$

g．$\frac{f^2}{(f+z)^2}$　h．$\frac{f+z}{z}$　i．$\frac{(f+z)^2}{z^2}$　j．$\frac{f-z}{z}$　k．$\frac{(f-z)^2}{z^2}$

⑧の解答群

a．f　b．$\frac{f+z}{2}$　c．$\frac{f-z}{2}$　d．$f+z$　e．$f-z$　f．$2f+z$

g．$2f-z$　h．$2f-\frac{z^2}{f}$　i．$2f+\frac{z^2}{f}$　j．$\frac{z^2}{f}$　k．$\frac{f^2}{z}$

⑨の解答群

a．f　b．$\frac{z}{f}$　c．$\frac{z^2}{f^2}$　d．$\frac{f}{z}$　e．$\frac{f^2}{z^2}$

f．$\frac{z}{f}+\frac{z^2}{f^2}$　g．$\frac{z}{f}-\frac{z^2}{f^2}$　h．$\frac{f+z}{f}$　i．$\frac{f+z}{2f}$　j．$\frac{2f+z}{f}$

⑩の解答群

a．身長と横幅がそれぞれほぼ同じ
b．身長と横幅がそれぞれほぼ2倍の
c．身長と横幅がそれぞれ4倍以上の
d．身長と横幅がそれぞれほぼ半分の
e．身長と横幅がそれぞれ4分の1以下の
f．身長が2倍で横幅がほぼ半分の
g．身長が4倍以上で横幅が4分の1以下の
h．身長がほぼ半分で横幅がほぼ2倍の
i．身長が4分の1以下で横幅が4倍以上の

⑪の解答群

a．に頭をつけて，頭を下，足を上
b．に頭をつけて，頭を上，足を下
c．に足をつけて，頭を下，足を上
d．に足をつけて，頭を上，足を下
e．から上方に距離fの位置に頭がきて，頭を下，足を上
f．から上方に距離fの位置に頭がきて，頭を上，足を下
g．から上方に距離$\frac{f}{2}$の位置に足がきて，頭を下，足を上
h．から上方に距離$\frac{f}{2}$の位置に足がきて，頭を上，足を下

⑫の解答群

a．右手を顔の横に上げ，右手が東側
b．右手を顔の横に上げ，右手が西側
c．右手を顔の横に上げ，右手が南側
d．右手を顔の横に上げ，右手が北側
e．左手を顔の横に上げ，左手が東側
f．左手を顔の横に上げ，左手が西側
g．左手を顔の横に上げ，左手が南側
h．左手を顔の横に上げ，左手が北側

物理（記述解答問題）

〔Ⅱ〕 以下の問の答を解答用紙の該当欄に記入せよ。

水平方向を向いた中心軸の回りを回転できる内径 $2r$ の円筒があり，内側に大きさの無視できる質量 m の物体が置かれている。物体は円筒の中心軸に垂直な断面内で運動するものとする。**図**に示すように，内側断面をあらわす円の中心から物体に引いた直線が鉛直線となす角度を θ とし，**図**の矢印方向（反時計回り）を正とする。また，円の最下点を原点 O とする。原点 O から円弧に沿って測った物体の変位を x とし，右向きを正とする。以下では円弧に対する接線方向を単に接線方向と記す。物体にはたらく力の接線方向成分と物体の速度の接線方向成分についても右向きを正とする。ただし，以下では θ が十分小さい場合を扱う。重力加速度を g とする。

はじめに，物体と円筒の内面の間に摩擦がない場合を考える。

問 1　角度が θ のとき，物体にはたらく重力の接線方向成分を，x を含む式で表せ。ただし，θ は十分小さく，$\sin\theta \fallingdotseq \theta$ がなり立つものとする。

問 2　**問 1** の結果は物体の動きが単振動とみなせることを示す。単振動の周期 T を求めよ。

以下では，物体と円筒の内面の間に摩擦がある場合を考え，静止摩擦係数を μ，動摩擦係数を $c\mu$（$0 < c < 1$）とする。

まず，円筒を静止させ，物体を円筒の底に置く。

問 3　円筒をきわめて小さい角速度で**図**の矢印方向（反時計回り）に回したところ，物体はすべらずに角度 θ が増加し，θ_0 になったとき物体はすべりはじめた。ここでは $\sin\theta_0 \fallingdotseq \theta_0$，$\cos\theta_0 \fallingdotseq 1$ が成り立つとして，θ_0 を求めよ。

これ以降の議論では，μ は非常に小さく，物体の運動も θ が十分小さい範囲にとどまり，$\sin\theta \fallingdotseq \theta$ が成り立つ場合を考える。遠心力は小さいとして無視し，物体にはたらく垂直抗力の大きさは一定とみなす。

問 4　**問 3** の状況で物体がすべり続けて x の位置にきたとき，物体にはたらく力の接線方向成分はいくらか。x と μ を含む式で表せ。

問 5　物体がすべりはじめた後，物体にはたらく力の接線方向成分が 0 になるときの x の値，および x の最小値をそれぞれ μ，c，r を用いて表せ。

つぎに，円筒を十分速い角速度 Ω で**図**の矢印の向き（反時計回り）に回転させながら，物体を静かに円筒の底に置くと，物体は単振動をはじめた。置いた瞬間には物体は静止しているが，円筒は回転しているので，物体にはこの瞬間から動摩擦力がはたらく。円筒の角速度 Ω は常に一定に保たれるものとする。

問 6　単振動の振幅を μ，c，r を用いて表せ。

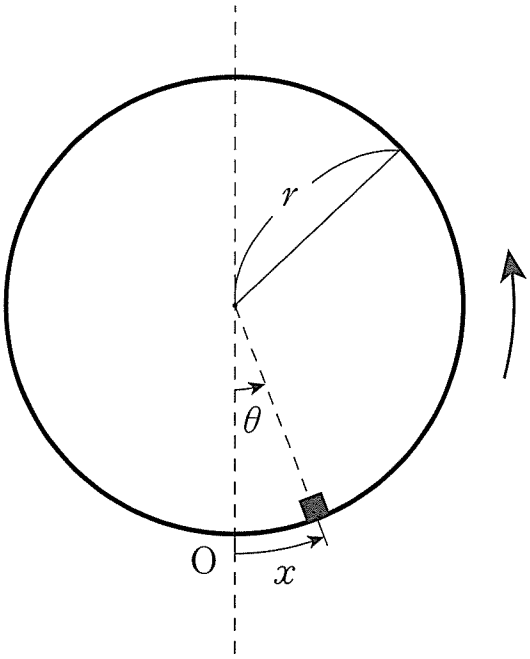
円筒の角速度を毎回すこしずつ小さくし，物体を静かに円筒の底に置いてしばらくのあいだ物体の振動の様子を観察してから物体を円筒から取り除く，という操作を繰り返した（物体を取り除くまでの間は円筒の角速度は一定に保た

れている)。すると，ある角速度 Ω_0 で振動の様子が突然変化した。このとき，以下の問に答えよ。

問 7　Ω_0 はいくらか。μ を含む式で表せ。

問 8　x の最小値を μ，c，r を用いて表せ。

問 9　$c = \dfrac{1}{2}$ の場合について，物体を円筒に置いた瞬間を $t = 0$ として，**問 2** で求めた周期 T の 3 倍の時間にわたり，物体の速度の接線方向成分と円筒が物体に及ぼす力の接線方向成分の時間変化の概略をそれぞれ図示せよ。その際，直線部分と曲線部分の違いを明確に示すこと。また，物体の速度の接線方向成分が減少に転じる時刻をすべて記入せよ。**図**には速度 $r\Omega_0$，力 μmg，および周期 T が記入されているのでガイドとして使用せよ。



図

物理（記述解答問題）

〔Ⅲ〕 以下の問の答を解答用紙の該当欄に記入せよ。

図1のように，距離ℓだけ離れている十分に長い平行な2本のレールを水平に置き，レールと平行な方向にx軸をとり，右向きを正とする。そしてここに，鉛直下向きに磁束密度の大きさがBの一様な磁場をかける。また，このレール上に質量mの細い導体棒をレールと垂直に置く。導体棒は常にレールと垂直なまま，レール上をx軸方向に動く。導体棒とレールの間の摩擦は無視する。またレールおよび導体棒の電気抵抗は0であり，レールおよび導体棒を通って流れる電流が作る磁場は無視できるとする。導体棒の速度と導体棒にはたらく力の向きはx軸の正の向きを正とする。またレールの左端にある2つの端子の間の電位差は，端子1の電位が端子2の電位に比べて高い場合を正とする。

はじめに，端子1と端子2の間に**図2**のような抵抗値Rの抵抗を接続する。このとき，抵抗，レール，導体棒からなる回路ができる。そして時刻$t=0$での導体棒の速度がv_0（$v_0>0$）であり，その後，導体棒は磁場からの力を受けて運動する場合を考える。

問1　導体棒の速度がvであったとき，端子間の電位差，および導体棒が磁場から受ける力を求めよ。

問2　時刻$t=0$から十分に時間が過ぎると導体棒の速度は0になる。時刻$t=0$から導体棒の速度が0になるまでに抵抗で発生したジュール熱を求めよ。

このように一様磁場からの力を受けて2本の平行なレール上を運動する導体棒は，レールの左端の端子間に接続する素子の種類によらず，B，ℓ，mのみで決まる電気容量をもつコンデンサーと同じはたらきをする。例として，端子1と端子2の間に**図3**のようなある素子（以下ではブラックボックスとよぶ）を接続した場合を考える。するとブラックボックス，レール，導体棒からなる回路ができる。この回路に流れる電流や端子間の電位差の振る舞いは，**図4**のように，ある電気容量のコンデンサーをブラックボックスに接続した場合の振る舞いと等しい。以下ではこの仮想コンデンサーの電気容量を求めよう。

ブラックボックスとレールを接続して，回路に電流が流れ，端子間に電位差が生じた場合を考える。ある時刻に導体棒が磁場から受ける力をFとし，その後の微小時間Δtの間に，端子間の電位差はΔVだけ変化したとしよう。この微小時間Δtの間に，端子1から導体棒を通って端子2に向かって電気量ΔQの電荷が移動したとする。ここで微小時間Δtの間では，Fおよび回路に流れる電流は一定であると考えてよい。

問3　微小時間Δtの間に導体棒が磁場から受けた力積$F\Delta t$とΔVの比$\dfrac{F\Delta t}{\Delta V}$を$B$，$\ell$，$m$を用いて表せ。

問4　導体棒を仮想コンデンサーとみなした場合，ΔQは仮想コンデンサーに流れ込む電気量と考えてよい。そうすると仮想コンデンサーの電気容量C_0は$\dfrac{\Delta Q}{\Delta V}$で与えられる。$C_0$を$B$，$\ell$，$m$を用いて表せ。

以上の考察をふまえ，以下の回路を考えよう。

まず，端子1と端子2の間に**図5**のような抵抗と平行板コンデンサーを直列に接続する。ここで平行板コンデンサーの電気容量をCとする。時刻$t=0$で平行板コンデンサーに蓄えられている電気量は0であり，このときの導体棒の速度はv_0（$v_0>0$）であった。その後，導体棒は磁場からの力を受けてレール上を運動し，時刻$t=0$から十分に時間が過ぎた後，導体棒の速度は一定となった。このように運動する導体棒も仮想コンデンサーとみなすことができる。したがって，導体棒の速度の時間変化は仮想コンデンサーに蓄えられる電気量の時間変化に対応する。

問5　時刻 $t=0$ で仮想コンデンサーに蓄えられている電気量を B，ℓ，m，v_0 を用いて表せ。

問6　導体棒の速度が一定となったとき，平行板コンデンサーに蓄えられている電気量を B，C，C_0，ℓ，v_0 を用いて表せ。

問7　十分に時間が過ぎて一定になった導体棒の速度を C，C_0，v_0 を用いて表せ。

問8　時刻 $t=0$ から導体棒の速度が一定になるまでに抵抗で発生したジュール熱は，時刻 $t=0$ での導体棒の運動エネルギーの何倍か。C，C_0 を用いて答えよ。

最後に，端子1と端子2の間に**図6**のようなコイルを接続した場合を考える。するとコイル，レール，導体棒からなる回路ができる。そしてこの導体棒が磁場からの力を受けて運動している場合を考える。ここで運動する導体棒を仮想コンデンサーとみなすと，この回路には電気振動が起こることとなり，端子間の電位差は周期的に変化する。したがって，端子間の電位差と導体棒の速度の関係から，導体棒はレール上を単振動することがわかる。以下では導体棒の振動の中心の位置を $x=0$ とし，単振動の角振動数を ω とする。ω を測ることによってコイルの自己インダクタンスの値を求める方法を考えよう。

問9　導体棒が位置 x にあるとき，導体棒にはたらく復元力は m，ω，x を用いて表されることを考慮して，回路を流れる電流を B，ℓ，m，ω，x を用いて表せ。ただし端子1から導体棒を通って端子2に流れる向きを電流の正の向きとせよ。

問10　回路を流れる電流の時間変化と端子間の電位差の関係から，コイルの自己インダクタンスを B，ℓ，m，ω を用いて表せ。

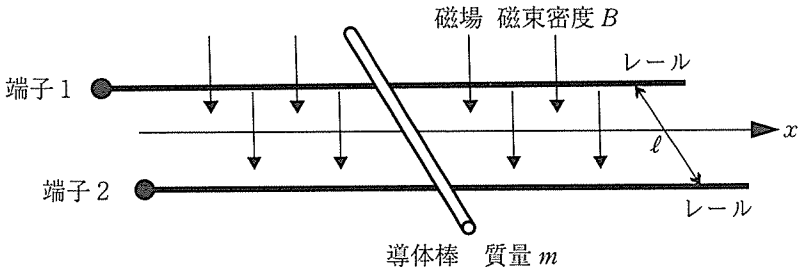


図1

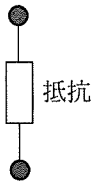


図2

図3

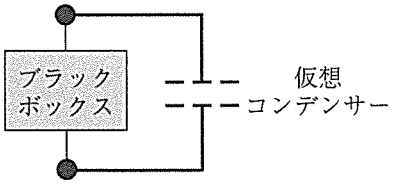


図4

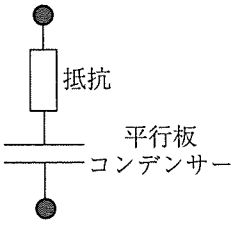


図5

図6