物　　　理　（3問題　100点）

物理問題　I

次の文章を読んで，$\boxed{}$ に適した式または数値を，それぞれの解答欄に記入せよ。なお，$\boxed{\boxed{}}$ はすでに $\boxed{}$ で与えられたものと同じものを表す。また，**問1**では，指示にしたがって，解答を解答欄に記入せよ。

以下では，ばね定数 k で自然長 ℓ のばね，および長さ L の糸を用いる。ばねや糸の質量は無視できるものとし，重力加速度の大きさを g，円周率を π とする。

(1)　**図1**のように，質量 m の2つの小球(質点)を糸とばねでつるし，つり合いの位置で静止させた。2つの小球は鉛直方向にのみ運動するものとし，糸がたるんでいないときの小球1の位置を原点として，鉛直下向きを座標軸の正の向きとする。また，小球1は天井にぶつからず，小球同士は衝突しないものとする。

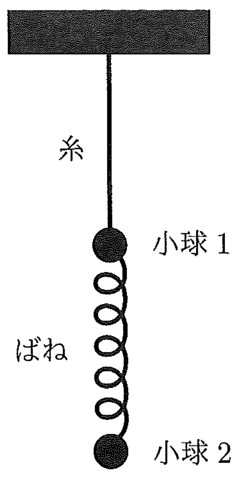

図1

いま，小球 2 をつり合いの位置から長さ d だけ引き下げ，静かに手を離す。d が十分に小さいときは，運動の途中で糸はたるまず，小球 2 は位置 $\boxed{\text{ア}}$ を中心とした，振幅 $\boxed{\text{イ}}$ の単振動をおこなう。d がある値より大きいときは，運動の途中で糸がたるむ。小球 1 にはたらく重力，糸の張力，ばねの力のつり合いを考えると，糸がたるみ始めた瞬間の小球 2 の位置は m，g，k，ℓ を用いて $\boxed{\text{ウ}}$ と表されるので，運動の途中で糸がたるむための条件は，$d >$ $\boxed{\text{エ}}$ とわかる。

次に，d が十分に大きく，糸がたるむ場合の運動を考えよう。小球 1，2 の位置をそれぞれ x_1，x_2 とし，重心の位置 $\dfrac{x_1 + x_2}{2}$，および小球 1 からみた小球 2 の相対位置 $x = x_2 - x_1$ について，糸がたるみ始めてから再びたるみがなくなるまでの運動を考える。2 つの小球にはたらくばねの力は，互いに逆向きで大きさが等しいので，重心はばねの力の影響を受けずに鉛直投げ上げ運動をおこなう。糸がたるみ始めた瞬間における重心の速さを m，g，k，d を用いて表すと $\boxed{\text{オ}}$ となる。一方，2 つの小球にはたらく重力は，向きが同じで大きさが等しいので，相対位置 x は重力の影響を受けずにばねの力で単振動をおこない，その周期は $\boxed{\text{カ}}$ で与えられる。また，小球 1 の速度が最小値をとる瞬間において，小球 1 からみた小球 2 の相対速度は $\boxed{\text{キ}}$ × $\boxed{\text{オ}}$ とわかる。

（2） **図2**のように，質量 m の2つの小球(質点)をばねと糸でつるす。2つの小球は鉛直方向にのみ運動するものとし，ばねが自然長のときの小球1の位置を原点として，鉛直下向きを座標軸の正の向きとする。いま**図3**のように，小球2を支えて静止させたところ，糸はたるまず張力が0であり，小球1も静止していたとする。このとき，小球1の位置は $\boxed{\text{ク}}$ である。この状態から，時刻0に小球2を上方に速さ v で打ち上げた。

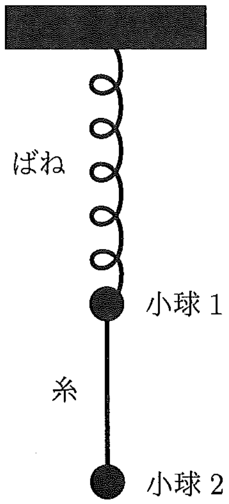

図2

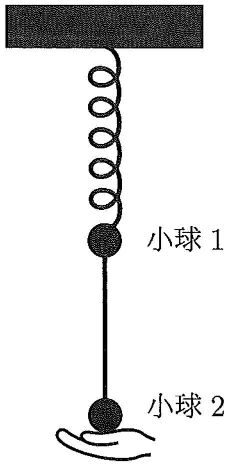

図3

まず，打ち上げ後に，小球2が小球1に衝突せず落下に転じる場合を考える。小球2が落下し，打ち上げられた位置に戻ってきたとき，糸のたるみがなくなる。たるみがなくなる前後で小球1，2の力学的エネルギーの和は保存されるものとすると，たるみがなくなった直後には，小球2の速度は $\boxed{\text{ケ}}$ であり，小球1は振幅が $\boxed{\text{コ}}$ の単振動を始める。

次に，打ち上げ後に，小球2が落下せず小球1と弾性衝突する場合を考える。衝突直後の小球1の速さ v' は，v，g，L を用いて $\boxed{\text{サ}}$ と表される。衝突後，2つの小球は糸がたるんだまま運動し，小球1が衝突時の位置に戻るまでのある時刻 T に糸のたるみがなくなった。その直後からしばらくの間，糸のたるみがないまま運動が続く条件を考えよう。まず，時刻 T に，小球の間の距離は

Lである。また，たるみがなくなる前後で小球1，2の力学的エネルギーの和は保存されるものとすると，時刻Tの直後に糸がたるまないためには，時刻Tの直前に小球1からみた小球2の速度は $\boxed{\text{シ}}$ でなければならない。よって，小球1にはたらくばねの力Fは，時刻Tの直前に$F \geqq 0$である(鉛直下向きを正とする)。一方，時刻Tには糸のたるみがないため張力が0以上であるが，そのとき$F > 0$ならば直後に糸がたるんでしまう。以上のことより，いま考えている運動においては，時刻Tに小球1の位置は $\boxed{\text{ス}}$ でなければならない。

2つの小球の力学的エネルギーが，衝突後から時刻Tの間はそれぞれ保存することを考えると，得られた条件より打ち上げの速さvは，m，g，k，Lを用いて表される関係式$v^2 =$ $\boxed{\text{セ}}$ を満たすことがわかる。

問1 小球同士が弾性衝突した時刻をT'とする。**図4**を解答欄に描き写し，時刻0からTまでの，小球の速度を表すグラフを描け。なお，小球1を実線で，小球2を二重線で表すこととする。**図4**に示されている値以外に，速度や時間の値を書き加える必要はない。

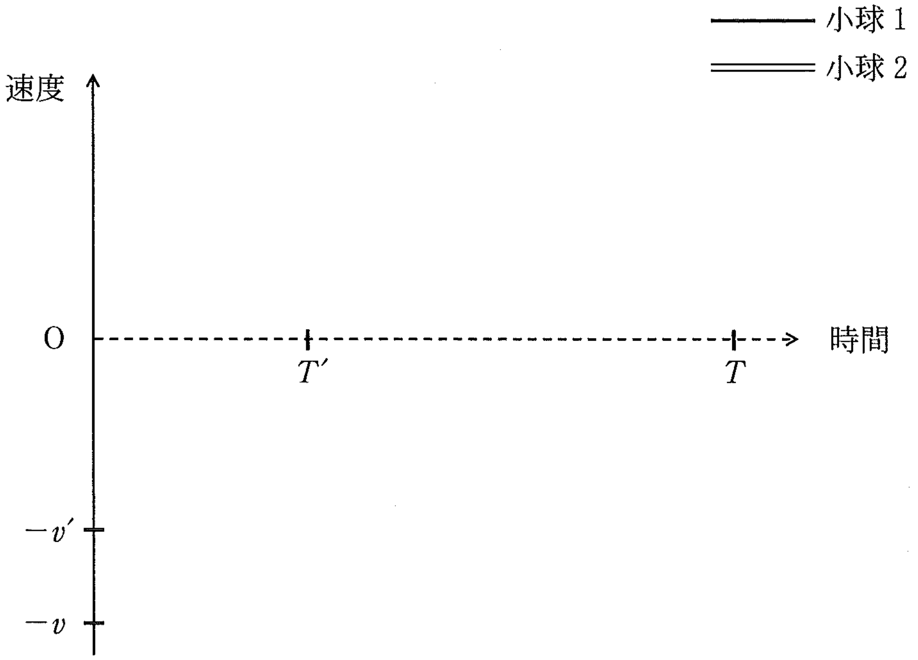

図4

物理問題　II

次の文章を読んで，$\boxed{}$ に適した式または数値を，それぞれの解答欄に記入せよ。なお，$\boxed{\boxed{}}$ はすでに $\boxed{}$ で与えられたものと同じものを表す。また，**問1**～**問3**では，指示にしたがって，解答をそれぞれの解答欄に記入せよ。ただし，円周率を π とする。

（1）**図1**のように，自己インダクタンス L のコイル，スイッチ，電気容量 C のコンデンサーからなる回路がある。コンデンサーに蓄えられる電気量 Q とコンデンサーの両端に現れる電圧 V の間には $Q = CV$ の関係が成り立つ。コンデンサーに初期の電気量 $Q = Q_0 (Q_0 > 0)$ を与え，スイッチを閉じたところ，周期 $2\pi\sqrt{LC}$ の電気振動が発生した。このとき，**図1**のコイルを流れる矢印の方向を正とした電流 I について，微小時間 Δt の間の微小変化を ΔI とすると，コイルの誘導起電力とコンデンサーの電圧 V の間には

$$L\frac{\Delta I}{\Delta t} = \boxed{\text{イ}} \qquad \text{(i)}$$

の関係がある。スイッチを閉じた後，電流 I は初期値0から負方向に流れ始める。

また，コンデンサーに蓄えられた電気量 Q と電圧 V の微小変化 ΔQ，ΔV の間に，$\Delta Q = C\Delta V$ の関係がある。電気量 Q は電流 I が負の場合は減少し，$\Delta Q = I\Delta t$ が成り立つので，微小時間 Δt の間の電圧 V の微小変化 ΔV と電流 I の間には

$$C\frac{\Delta V}{\Delta t} = \boxed{\text{ロ}} \qquad \text{(ii)}$$

の関係がある。スイッチを閉じた後，電流 I が負方向に流れ始めるので，電圧 V は初期値 $\frac{Q_0}{C}$ から減少し始める。この振動において，V は I に対して $\boxed{\text{ハ}}$ だけ位相が遅れる。また，I の最大値は $\boxed{\text{ニ}}$ である。

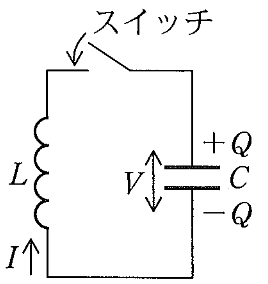

図１

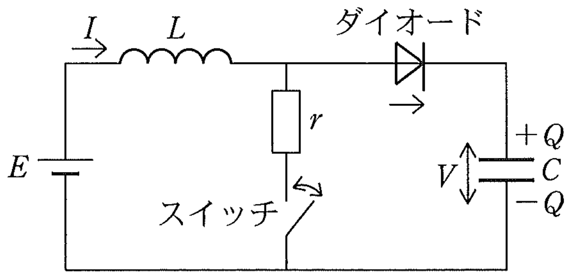

図２

（２） 図２のように，電圧Eの直流電源，自己インダクタンスLのコイル，スイッチ，抵抗値rの抵抗，ダイオード，電気容量Cのコンデンサーからなる回路がある。ダイオードは理想的な整流作用をもつとし，矢印で示した順方向の抵抗は０，逆方向の抵抗は無限大とする。

十分長い間スイッチを閉じると，コイルの誘導起電力は消滅し，ダイオードには電流が流れなくなる。このときコイルに流れる電流Iは $\boxed{\text{ホ}}$ である。次に，時刻$t=0$にスイッチを開けた。その直後のコイルに流れる電流I_0は $\boxed{\boxed{\text{ホ}}}$ である。コンデンサーが，時刻$t=0$にスイッチを開ける前に電源と等しい電圧Eで充電されていた場合を考える。コンデンサーの両端に現れる電圧VのEからの変化分を$V'=V-E$とおくと，スイッチを開けた直後のV'の値は０である。スイッチを開けた後，ダイオードに電流が流れ，コンデンサーが充電されるとともに，V'は正となり，Iは減少し始める。微小時間Δtの間のIの微小変化ΔI，V'の微小変化$\Delta V'$とI，V'の間には

$$\begin{cases} L\dfrac{\Delta I}{\Delta t} = \boxed{\text{へ}} \\ C\dfrac{\Delta V'}{\Delta t} = \boxed{\text{ト}} \end{cases} \qquad \text{(iii)}$$

の関係がある。式(iii)は式(i)，(ii)と同じ形をしているため，初期値$I=I_0$，$V'=0$の電気振動が始まるが，ダイオードが存在するためにIは負にならず，図３のように時刻$T_1=$ $\boxed{\text{チ}}$ に振動は停止する。

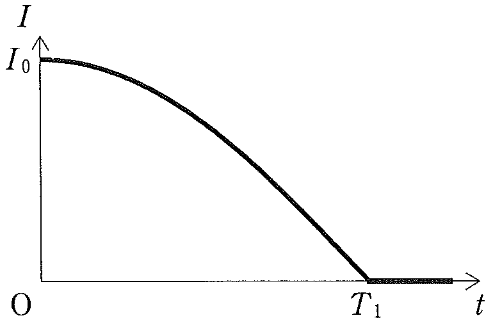

図 3

問 1　コイルに蓄えられていた初期のエネルギー，電源から供給されるエネルギー，コンデンサーに蓄積されるエネルギーの関係から時刻 T_1 におけるコンデンサーの両端に現れる電圧を求め，V の時間変化を**図 3** と同様に描け。

（3）　**図 2** の回路から抵抗値 r の抵抗を取り去り，抵抗値 R の抵抗を加えた**図 4** の回路を，電源と抵抗を直接接続した**図 5** の回路と比較してみよう。ただし，**図 4** の回路ではスイッチを微小時間 Δt_1 だけ閉じ，その後微小時間 Δt_2 だけ開ける操作を微小時間 $T = \Delta t_1 + \Delta t_2$ で周期的にくりかえすものとする。また，微小時間 Δt_1 の間のコイルを流れる電流 I，コンデンサーの両端に現れる電圧 V の微小変化をそれぞれ ΔI_1，ΔV_1，微小時間 Δt_2 の間の I，V の微小変化をそれぞれ ΔI_2，ΔV_2 とする。

スイッチが閉じた状態では，電圧 V を正とするとダイオードに電流は流れず，電源の電圧 E により電流 I は増加，コンデンサーは抵抗 R を通して放電し

$$\begin{cases} L\dfrac{\Delta I_1}{\Delta t_1} = \boxed{\text{リ}} \\ C\dfrac{\Delta V_1}{\Delta t_1} = \boxed{\text{ヌ}} \end{cases} \qquad \text{(iv)}$$

の関係が成立する。スイッチが開いた状態では，電流 I を正とするとダイオードに電流が流れ

$$\begin{cases} L\dfrac{\Delta I_2}{\Delta t_2} = \boxed{\text{ル}} \\ C\dfrac{\Delta V_2}{\Delta t_2} = \boxed{\text{ヲ}} \end{cases} \qquad \text{(v)}$$

の関係が成立する。

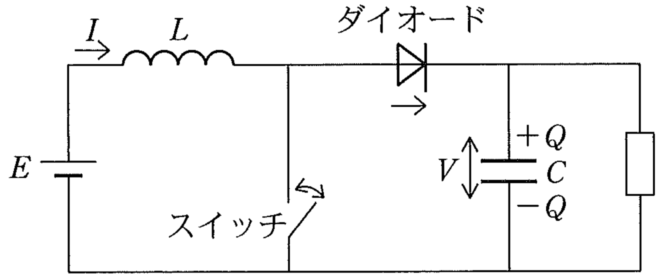

図 4

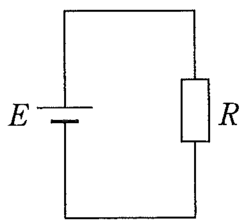

図 5

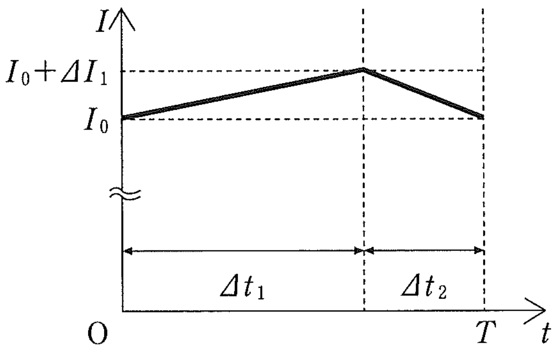

図 6

十分時間がたち，I，V が微小時間 T で周期的に変化する定常状態になったときの 1 周期 $0 \leqq t \leqq T$ の間の電流 I の変化は**図 6** のようになった。ただし，スイッチを閉じた瞬間を $t = 0$ とし，そのときの電流 I と電圧 V をそれぞれ $I = I_0$，$V = V_0$ とおく。また，定常状態の ΔI_1，ΔI_2，ΔV_1，ΔV_2 は，式(iv)，(v) において $I = I_0$，$V = V_0$ を代入することにより，I_0，V_0 を用いて表現できるものとする。

問 2　定常状態になったときの１周期では$\Delta I_1 + \Delta I_2 = 0$，$\Delta V_1 + \Delta V_2 = 0$が成り立つ。$\Delta t_1 = \alpha \Delta t_2$のとき，電圧$V_0$，電流$I_0$を$\alpha$，$E$，$R$のうち必要なものを用いて表せ。また，$\alpha = 1$の場合の電圧$V$の変化を，**図 6**を参考に$E$，$C$，$R$，$T$のうち必要なものを用いて描け。

問 3　**問 2**で得られたように，**図 4**の回路は電源の電圧Eよりも大きな電圧Vを作り出すことができる。ここで**図 4**と**図 5**の抵抗で消費される電力を考える。コンデンサーの両端に現れる電圧Vは，ΔV_1，ΔV_2がV_0より十分小さいとき，$V = V_0$の一定値とみなせる。この場合，$\Delta t_1 = \alpha \Delta t_2$のとき，**図 4**の抵抗で消費される電力は**図 5**の抵抗で消費される電力の何倍になるか，αを用いて答えよ。

物理問題　Ⅲ

次の文章を読んで，$\boxed{\qquad}$ に適した式または数値を，それぞれの解答欄に記入せよ。なお，$\boxed{\boxed{\qquad}}$ はすでに $\boxed{\qquad}$ で与えられたものと同じものを表す。また，**問1**，**問2**では，指示にしたがって，解答をそれぞれの解答欄に記入せよ。

図1のように，x 軸，y 軸，z 軸を3辺とする立方体の箱の中を多数の粒子(質量 m)が，壁面に衝突しながら運動している。この立方体の各辺の長さは一定の速さ w で時間とともに増大する。すなわち，時刻 t における各辺の長さは $L+wt$ であるとする(L は定数)。したがって，立方体の各面の面積も時間とともに大きくなる。具体的には，原点Oを頂点とする3つの面はそれぞれの位置に固定され，他の3つの面がそれぞれに垂直な方向に一定の速さ w で移動するとする。ただし，各面が移動する速さ w は粒子の速さに比べて十分に小さいとする。以下では，$x=0$ の位置にある面を壁A，それに対面し，x 軸の正の向きに速さ w で移動する面を壁Bと呼ぶ。粒子にはたらく重力の影響は無視する。

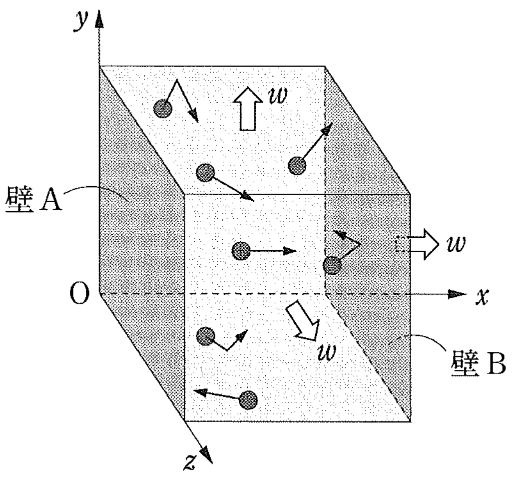

図1

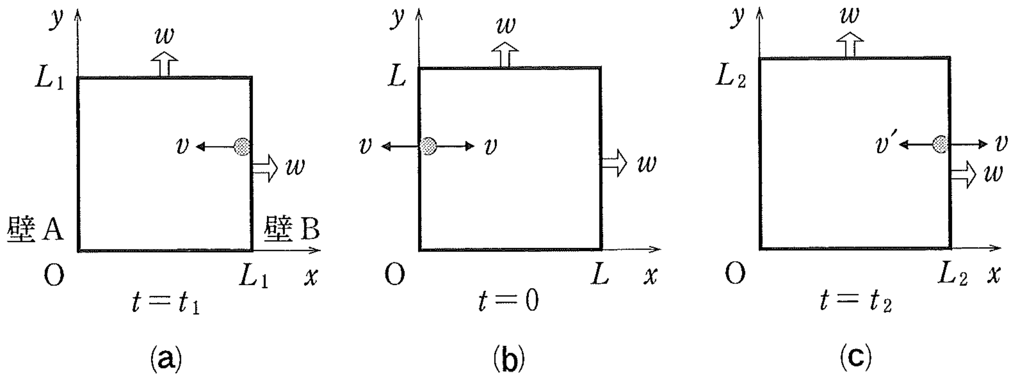

図 2

以下では簡単のために，速度が x 軸の正あるいは負の方向を向いた 1 つの粒子を考え，まず，図 2 の(a)→(b)→(c)で表された過程を考察する。この粒子と他の粒子との衝突はないものとする。図 2 は，図 1 の立方体を z 軸の正の側から見たものである。時刻 $t = t_1 (t_1 < 0)$ において，立方体の辺の長さは L_1 であり，粒子は壁 B 上にあって速度は x 軸の負の方向を向き，その大きさは v であるとする。その後，時刻 $t = 0$ において粒子は壁 A に弾性衝突し，衝突後の速度は x 軸の正の向きに大きさ v となった。$t = 0$ における立方体の辺の長さは L である。さらに時刻 $t = t_2 (t_2 > 0)$ において，粒子は壁 B に弾性衝突し，直後の速度は x 軸の負の向きに大きさ v' となった。$t = t_2$ における立方体の辺の長さは L_2 であった。L_1 と L_2 を L，v，w を用いて表すと $L_1 = \boxed{\text{あ}}$，$L_2 = \boxed{\text{い}}$ であり，図 2 の過程の時間 $T_{12} = t_2 - t_1$ は L，v，w を用いて $T_{12} = \boxed{\text{う}}$ と表される。さらに，w は v に比べて十分に小さいため，$\boxed{\text{う}}$ を L，v，$\dfrac{w}{v}$ で表し，微小な $\dfrac{w}{v}$ の 2 次以上を無視する近似を行うと，$T_{12} \fallingdotseq \boxed{\text{え}}$ となる。なお，必要ならその絶対値が微小な実数 x に対する近似式 $\dfrac{1}{1+x} \fallingdotseq 1 - x$ を用いてよい。壁 A が粒子から受ける x 軸方向の力の時間平均 $\overline{F_x}$ は，粒子が受ける力積 $-\overline{F_x}T_{12}$ が時刻 $t = 0$ における衝突での粒子の x 軸方向の運動量変化に等しいとした関係式から求まる。そこで，壁 A が粒子から受ける圧力 P を，$|\overline{F_x}|$ を壁 A の面積で割ったものとする。T_{12} として $\boxed{\text{え}}$ を用い，壁 A の面積を衝突時刻 $t = 0$ での L^2 であるとすると，m，v，L を用いて $P = \boxed{\text{お}}$ となる。なお，$\boxed{\text{お}}$ は w にはよらない量である。

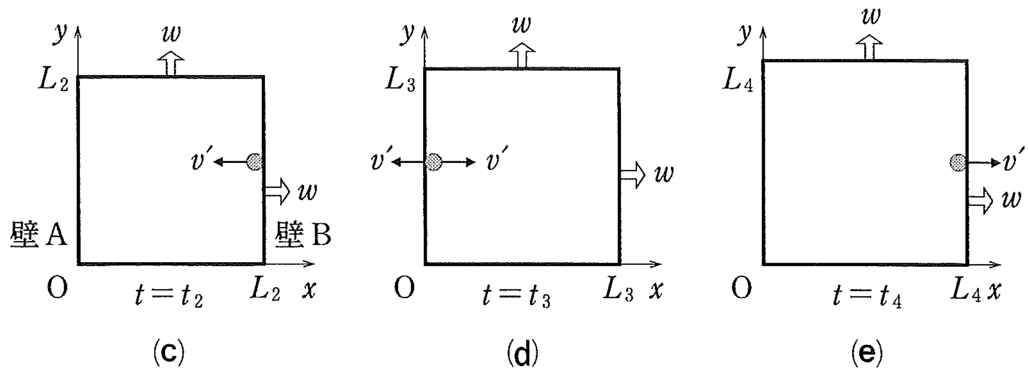

図 3

次に，**図 3** の(c)→(d)→(e)で表される，時刻 $t = t_2$ に速さ v' で壁Bを離れた粒子が，再び壁Aに弾性衝突し，壁Bに戻ってくるまでの過程を考える。まず，v' は v と w により

$$v' = v - aw \qquad \text{(i)}$$

と与えられ，定数 a は $a =$ $\boxed{\text{か}}$ である。しかし，以下の解答では，指示された場合を除き，v' を v と w で表す際は，a を用いた式(i)の右辺の表式を用いること。粒子が時刻 $t = t_3$ に壁Aに弾性衝突した時の立方体の辺の長さ L_3 は L，v，v'，w を用いて $L_3 =$ $\boxed{\text{き}}$ となる。**図 3** の過程により壁Aが粒子から受ける圧力 P' は，**図 2** の過程に対する $P =$ $\boxed{\boxed{\text{お}}}$ の結果において，v を v' に，L を L_3 に置き換えることで得られる。そこで，圧力の変化分 $\Delta P = P' - P$ を考え，比 $\dfrac{\Delta P}{P}$ を $\dfrac{w}{v}$ の関数として表し，$\dfrac{w}{v}$ の2次以上を無視すると

$$\frac{\Delta P}{P} = \boxed{\text{く}} \times \frac{w}{v} \qquad \text{(ii)}$$

となる。ここで，$\boxed{\boxed{\text{く}}}$ は a を用いて表される量である。式(ii)の導出において，必要なら，その絶対値が微小な実数 x の2次以上を無視する近似で

$$(1 + a_1x)^{b_1}(1 + a_2x)^{b_2}\left(1 + \frac{a_3x}{1 + cx}\right)^{b_3} \fallingdotseq 1 + (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)x$$

であることを用いてよい。ここで，a_1，a_2，a_3，b_1，b_2，b_3，c は任意の実数である。

さらに，**図 2** の過程での粒子の壁 A への衝突時刻 $t = 0$ における立方体の体積 $V = L^3$ と，**図 3** の過程での衝突時刻 $t = t_3$ における体積 $V' = (L_3)^3$ に対して，体積の変化分 $\Delta V = V' - V$ を考える。比 $\dfrac{\Delta V}{V}$ を $\dfrac{w}{v}$ の関数として表し，$\dfrac{w}{v}$ の 2 次以上を無視すると

$$\frac{\Delta V}{V} = \boxed{\quad け \quad} \times \frac{w}{v} \tag{iii}$$

となる。式(ii)と式(iii)の結果から，$\dfrac{\Delta P}{P}$ と $\dfrac{\Delta V}{V}$ の間に

$$\frac{\Delta P}{P} + \gamma \frac{\Delta V}{V} = 0 \tag{iv}$$

の関係式が成り立つことが分かる。ここで，γ は a を用いて $\gamma = \boxed{\quad こ \quad}$ で与えられる。

以上の式(iv)の導出は，x 軸方向にのみ運動する 1 つの粒子に注目したものであり，圧力 P はその粒子のみから壁 A が受ける圧力であった。しかし，P をあらゆる方向に運動する全ての粒子から壁 A が受ける圧力とし，ΔP と ΔV を与えられた微小時間内での変化分としても，式(iv)が成り立つことが示される。さらに，P が $P + \Delta P$ に，V が $V + \Delta V$ に微小に変化する間に立方体内の粒子からなる理想気体の絶対温度が T から $T + \Delta T$ に微小に変化したとすると，式(iv)は理想気体の状態方程式を用いることで

$$\frac{\Delta T}{T} + \boxed{\quad さ \quad} \times \frac{\Delta V}{V} = 0$$

と表すこともできる。ここで，$\boxed{\quad さ \quad}$ は γ を用いて表される量であり，微小量 $\dfrac{\Delta P}{P}$，$\dfrac{\Delta V}{V}$，$\dfrac{\Delta T}{T}$ の 2 次以上を無視した。

関係式(iv)は，理想気体の断熱変化におけるポアソンの法則として知られたものであり，a の値 $\boxed{\quad か \quad}$ を代入した γ の値 $\boxed{\quad し \quad}$ は単原子分子気体のものを再現している。しかし，多原子分子気体の場合は，式(iv)の定数 γ は $\boxed{\quad し \quad}$ とは異なる値をとる。

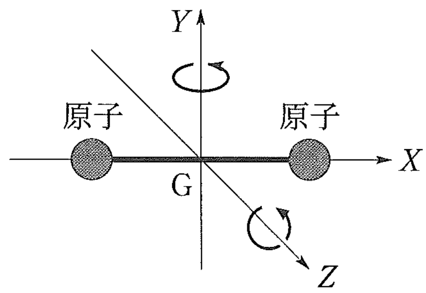

図 4

そこで，図 1 の立方体内を x 軸方向に運動する 1 粒子を再び考え，次のようなモデルを用いて，二原子分子気体に対する式(iv)の γ を求めてみよう。二原子分子を 2 つの質点(原子)が長さ一定で質量を無視できるまっすぐな棒でつながったものと見なすと，この二原子分子には重心の並進運動の他に，図 4 のように，重心(図 4 の原点 G)のまわりの，Y 軸と Z 軸を回転軸とする 2 つの回転運動がある。いま，図 1 の立方体の中を x 軸方向に並進運動する二原子分子に対して図 2 と図 3 の過程を考える。この二原子分子のエネルギー E は，重心の x 軸方向の並進運動のエネルギー K_x と重心のまわりの 2 つの回転運動のエネルギーの和であるとし，各回転運動のエネルギーの値がどれも $\frac{1}{3}K_x$ に等しく，$E=\left(1+\frac{2}{3}\right)K_x$ の関係が常に成り立っていると仮定する。この場合の，図 2 (C)で表された，時刻 $t=t_2$ における分子と壁 B の衝突後の分子の速さ v' を求めるために，この衝突を二原子分子(質量 m)と壁 B に対応した重い物体(質量 M)の x 軸方向の衝突過程に置き換え，最後に質量 M を質量 m に比べて十分に大きくする。この衝突において，図 4 の二原子分子の構造を直接に考慮する必要はなく，二原子分子は上記のエネルギー E を持った質量 m の粒子と考えればよい。衝突前後の分子と物体の速度は図 5 の通りとする。

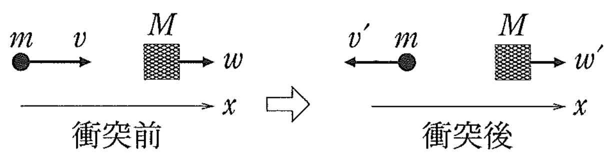

図 5

問 1　**図 5** の衝突過程におけるエネルギー保存と運動量保存の関係式を書きくだせ。それらより，衝突後の二原子分子の速さ v' を v，w，$\dfrac{m}{M}$ を用いて表わせ。なお，v' を導出する途中計算を書く必要はない。

問 2　**問 1** で求めた v' において M を m に比べて十分に大きくする，すなわち，$\dfrac{m}{M}$ を近似的に 0 として，二原子分子気体の場合の式(i)の a の値と式(iv)の γ の値を求めよ。

物理問題は，このページで終わりである。